

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

# CONTRASTES NO PARAMÉTRICOS

Bondad de ajuste	<a href="#">Contraste Chi-cuadrado de Pearson</a> <a href="#">Contraste de Kolmogorov-Smirnov / Contraste de Shapiro Wilks</a>
Mediana	<a href="#">Contraste de signos de la Mediana</a> <a href="#">Contraste rangos-signos de Wilcoxon</a>
Comparación de dos poblaciones	<a href="#">Contraste de Kolmogorov-Smirnov</a>
Muestras independientes	<a href="#">Contraste de rachas de Wald-Wolfowitz</a> <a href="#">Contraste de la U de Mann-Whitney</a>
Comparación de dos poblaciones	<a href="#">Contraste de signos de la Mediana</a>
Muestras relacionadas	<a href="#">Contraste rangos-signos de Wilcoxon</a> <a href="#">Contraste de Ansari-Bradley</a> <a href="#">Contraste de Siegel-Tukey</a>
Independencia	<a href="#">Contraste Chi-cuadrado de Pearson</a>

Métodos estadísticos para la  
Administración y Dirección de Empresas

Contrastes no  
paramétricos



## TABLAS ESTADÍSTICAS

Binomial	Poisson	Normal	t - Student
Chi - cuadrado	Fisher - Snedecor	Kolmogorov - Smirnov	Lilliefors
Shapiro - Wilk	Rachas	Mann - Whitney	Kruskal - Wallis
Wilcoxon		Signo	Tau Kendall

Asignatura..... Grupo.....  
Apellidos ..... Nombre.....  
Ejercicio del día .....

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Índice Estadística No Paramétrica

1 Rangos-signos Wilcoxon: Posición	22
2 Wilcoxon: Posición	27
3 Spearman-Rho: Independencia y asociación	30
4 Rachas de Wald-Wolfowitz. Contraste signos. Wilcoxon: Aleatoriedad	33
5 Wilcoxon: Aleatoriedad muestra	46
6 Kruskal-Wallis: Independencia y asociación	53
7 Kruskal-Wallis: Independencia y asociación	57
8 Tau de Kendall: Relación	61
9 Rachas de Wald-Wolfowitz. Lilliefors. Shapiro-Wilk: Ajuste normal	64
10 Kolmogorov-Smirnov: Ajuste Weibull	72
11 Kolmogorov-Smirnov: Ajuste uniforme	75
12 U de Wilcoxon-Mann-Whitney. Kolmogorov-Smirnov. Mediana: Comparar poblaciones	79
13 Kolmogorov-Smirnov: Ajuste exponencial	86
14 Kolmogorov-Smirnov. Chi-cuadrado: Ajuste exponencial	89
15 Rachas de Wald-Wolfowitz: Aleatoriedad	94
16 Chi-cuadrado. Lilliefors: Ajuste normal	98
17 Siegel-Tukey: Dispersión	103
18 Siegel-Tukey: Dispersión	105
19 Ansari-Bradley: Dispersión	107
20 Ansari-Bradley: Dispersión	113
Tablas no paramétricas	117

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

## CONTRASTES NO PARAMÉTRICOS

El *contraste no paramétrico* tiene la ventaja de ser menos exigente que el *contraste paramétrico* a nivel de supuestos, aunque presenta un aspecto negativo al ofrecer menor potencia estadística ( $1 - \beta$ ) que la prueba paramétrica, es decir, con la prueba no paramétrica es menor la probabilidad de cometer un Error Tipo I (Rechazar la hipótesis nula  $H_0$  cuando es Cierta).

Entre los contrastes no paramétricos: La *prueba de signos* y el *test de rangos-signos de Wilcoxon* permiten el contraste de hipótesis acerca de la localización de la variable en estudio respecto a la mediana, no respecto a la media como la prueba paramétrica t de Student.

El *test de rangos-signos de Wilcoxon* requiere que los datos procedan de una población continua y simétrica, mientras que la *prueba de signos* no asume que la variable sea simétrica, motivo por el que es recomendable utilizar cuando las variables en estudio son de carácter asimétrico.

### *Contraste de signos (prueba binomial)*

- *Contraste bilateral:*  $H_0: M_e = k$     $H_1: M_e \neq k$

Los signos positivos y negativos se calculan haciendo las diferencias  $D_i = X_i - M_e$

$S_+$  = "Número de signos positivos en la muestra"

$S_-$  = "Número de signos negativos en la muestra"

El estadístico de prueba  $S = \min(S_+, S_-)$  bajo la hipótesis nula  $H_0$  sigue una distribución binomial

$$S \sim B(n, 1/2) \quad E[S] = n \cdot p = \frac{n}{2} \quad V[S] = n \cdot p \cdot q = \frac{n}{4}$$

$$\text{Cuando } n > 10 \longrightarrow S \sim N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_p = \frac{\left| (S - 0,5) - \frac{n}{2} \right|}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \frac{\left| (S - 0,5) - 0,5 \cdot n \right|}{0,5 \cdot \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$$

- *Contraste unilateral:*  $H_0: M_e \leq k$     $H_1: M_e > k$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ cuando } z_p = \frac{(S - 0,5) - 0,5 \cdot n}{0,5 \cdot \sqrt{n}} \leq z_\alpha$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Contraste de rangos-signos de Wilcoxon

La prueba de signos de Wilcoxon supone que los datos proceden de una población continua y simétrica. Se utiliza para rechazar o no la diferencia estadísticamente significativa entre dos conjuntos de observaciones que tienen una distribución cualesquiera desconocida.

La prueba consiste en lo siguiente:

- a) Se calculan las diferencias de dos observaciones
  - b) Se jerarquiza en orden ascendente el valor absoluto de las diferencias
  - c) Se suman las jerarquizaciones de las diferencias positivas, denominando a la suma con el símbolo  $T_+ = \text{Suma de rangos de las } D_i > 0$
  - d) Se calculan los valores críticos  $T_{\alpha,n}$  de la tabla para el test de rangos-signos de Wilcoxon
  - e) Si  $T_+ < T_{\alpha,n}$  no existe diferencia significativa entre las observaciones a un nivel de significación  $\alpha$
- *Contraste bilateral:*  $H_0: M_e = k \quad H_1: M_e \neq k$

Estadístico de prueba:  $T_+ = \text{Suma de los rangos positivos de } D_i = X_i - k = \sum R_i^+$

Si  $T_+ < T_{\alpha,n}$  se admite la hipótesis nula. El valor de  $T_{\alpha,n}$  viene tabulado en Tablas de Wilcoxon

Cuando el tamaño muestral  $n > 15$  se puede utilizar la aproximación normal, y en lugar de

$$T_+ = \sum R_i^+, \text{ utilizar como estadístico de contraste } z_p = \frac{|T_+ - E[T_+]|}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H_0} N(0,1)$$

$$\text{Se admite } H_0 \text{ si } z_p = \frac{|T_+ - E[T_+]|}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} \leq z_{\alpha/2}$$

- *Contraste unilateral:*  $H_0: M_e \leq k \quad H_1: M_e > k$

$$\text{Se admite } H_0 \text{ si } z_p = \frac{T_+ - E[T_+]}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} \leq z_\alpha$$

El cálculo del valor experimental del estadístico, se obtiene:

$$E[T_+] = \frac{n \cdot (n+1)}{4} \quad \text{Var}[T_+] = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24}$$

$$z = \frac{T_+ - \frac{n \cdot (n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24} - \sum_{i=1}^k \frac{t_i^3 - t_i}{48}}}$$

$$T_+ = \sum R_i^+ \quad T_- = \sum R_i^- \quad T = \min(T_+, T_-)$$

$k \equiv$  número de rangos distintos en donde hay empates

$t_i \equiv$  número puntuaciones empatadas en el rango  $i$ -ésimo

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Prueba del test de rachas de Wald-Wolfowitz

Permite verificar la hipótesis nula de que la muestra es aleatoria, es decir, si las sucesivas observaciones son independientes.

*Contraste:*  $H_0$ : La muestra es aleatoria     $H_1$ : La muestra no es aleatoria

Estadístico de prueba:  $R$  = "Número de rachas en la muestra"

El contraste se basa en el número de rachas que presenta la muestra. Una racha es una secuencia de valores muestrales con una característica en común precedida y seguida por valores que no presentan esa característica.

En esta línea, se considera una racha la secuencia de  $k$  valores consecutivos superiores o iguales a un valor de corte (media, mediana, moda, ...) siempre que se encuentran precedidos y seguidos por valores inferiores a este valor de corte.

El número total de rachas en una muestra proporciona un indicio de si hay o no aleatoriedad en la muestra. Un número reducido de rachas (el caso extremo es 2) es indicio de que las observaciones no se han extraído de forma aleatoria, los elementos de la primera racha proceden de una población con una determinada característica (valores mayores o menores al punto de corte) mientras que los de la segunda proceden de otra población.

De forma idéntica un número excesivo de rachas puede ser también indicio de no aleatoriedad de la muestra.

Si la muestra es suficientemente grande y la hipótesis de aleatoriedad es cierta, la distribución muestral del número de rachas  $R$  puede aproximarse mediante una distribución normal de parámetros:

$$E(R) = \frac{2n_1 n_2}{n} + 1 \quad \text{Var}(R) = \sqrt{\frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n)}{n^2 (n-1)}}$$

Se acepta la hipótesis nula cuando  $z_R = \frac{|R + c - E(R)|}{\text{Var}(R)} \leq z_{\alpha/2}$

$R < E(R) \rightarrow c = 0,5$	$R > E(R) \rightarrow c = -0,5$
--------------------------------	---------------------------------

Cuando hay más de 10 rachas y el tamaño de la muestra  $n > 40$  se puede utilizar la aproximación

asintótica de Levene:  $R \xrightarrow{d} N\left[\frac{2n-1}{3}, \sqrt{\frac{16n-29}{90}}\right]$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Cuando  $n_1 > 10$  y  $n_2 > 10$  se puede aplicar la distribución asintótica normal de Wald y Wolfowitz,

denotando por  $\gamma = \frac{n_1}{n}$  la proporción de observaciones de una categoría en la muestra de tamaño  $n$   
 se verifica que:  $R \xrightarrow{d} N[2\gamma(1-\gamma)n, 2\gamma(1-\gamma)\sqrt{n}]$

### Prueba de Spearman Rho

Se utiliza para aceptar o no la diferencia estadísticamente significativa entre los dos conjuntos de observaciones de tipo cardinal u ordinal.

El coeficiente de correlación de Spearman Rho, al igual que el de Pearson, muestra una asociación entre variables que no se comportan normalmente, entre variables ordinales.

- *Contraste bilateral:*  $H_0: \rho_s = 0 \quad H_1: \rho_s \neq 0$

$\rho_s$  ≡ Coeficiente de asociación por rangos de Spearman de las variables aleatorias X e Y

$$\text{Estadístico contraste: } r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n D_i^2}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

$D_i$  ≡ Diferencia de rangos, ordenando de menor a mayor los valores de los dos factores o variables.

$r_s$  ≡ Coeficiente de asociación por rangos de Spearman de la muestra considerada

Si  $|r_s| \leq \rho_{\alpha, n}$  se acepta la hipótesis nula  $\rho_{\alpha, n}$  ≡ valor crítico tablas de Spearman

- Para muestras grandes con  $n > 20$  se utiliza una aproximación a la t de Student:

$$\text{Estadístico de contraste: } t = \frac{|r_s \cdot \sqrt{n-2}|}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

Se acepta  $H_0$  si  $t_0 < t_{\alpha/2, n-2}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Prueba Tau de Kendall

Es una medida no paramétrica de asociación de variables ordinales o de rangos que tiene en consideración los empates. El signo del coeficiente indica la dirección de la relación y su valor absoluto indica la magnitud de la misma, de modo que los mayores valores absolutos indican relaciones más fuertes. Los valores posibles varían de  $-1$  a  $1$ .

- Contraste bilateral:  $H_0: \tau_{xy} = 0$     $H_1: \tau_{xy} \neq 0$

$$\text{Estadístico de contraste: } \tau = \frac{|2 \cdot S|}{n \cdot (n-1)}$$

con  $n \equiv$  tamaño de la muestra y  $S \equiv$  Suma total de la función indicador:  $S = \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n \psi_{ij}$

El estadístico de contraste  $\tau$  se construye mediante una tabla que contenga los rangos  $R_{x_i}$  y  $R_{y_i}$ , considerando los valores ordenados de mayor a menor. Posteriormente se reordenan siguiendo el orden natural de  $R_{x_i}$

Se hallan los indicadores utilizando la doble tabla de  $R_{y_i}^*$

$$\psi_{ij}(R_{y_i}^*, R_{y_j}^*) = \begin{cases} 1 & \text{Si no hay inversión de rangos} \\ -1 & \text{Si hay inversión de rangos} \end{cases}$$

Se rechaza  $H_0$  si  $P[\tau \geq k | H_0 \text{ es Cierta}]$

Los valores se encuentran tabulados, para  $n > 10$  se emplea una aproximación asintótica de la

distribución normal  $\tau \longrightarrow N\left(0, \sqrt{\frac{2 \cdot (2n+5)}{9n \cdot (n-1)}}\right)$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Prueba de Kruskal-Wallis

Permite contrastar si varias muestras independientes, de iguales o diferentes tamaños, proceden de la misma población continua.

Sean  $F_1, F_2, \dots, F_h$  las correspondientes funciones de distribución. Se trata de comprobar si estas funciones presentan diferencias significativas.

Aplicando el test de Kruskal-Wallis se contrasta:

$$H_0: F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_h(x) \quad H_1: \text{Al menos dos son diferentes}$$

siendo  $F_i$  la función de distribución de la variable  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots$

Estadístico de contraste:  $H = \frac{12}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (n+1)$

Siendo,  $n = \sum_{i=1}^k n_i$      $R_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}$      $r_{ij} \equiv \text{Rango de la observación } j\text{-ésima de la muestra } i$

Se rechaza  $H_0$  cuando  $P(H \geq h_\alpha | H_0) = \alpha$

$h_\alpha \equiv$  valor crítico que se observa en las tabla de valores críticos de Kruskal-Wallis.

Cuando todos los tamaños muestrales son mayores que 5 se recurre a la aproximación asintótica, que emplea la distribución  $\chi^2_{\alpha, k-1}$  con  $k \equiv$  número de muestras

■ Cuando hay observaciones repetidas el estadístico de contraste  $H$  emplea un factor de corrección:

$$f_c = 1 - \frac{\sum_j (\tau_j^3 - \tau_j)}{n^2 \cdot (n-1)}$$

$\tau_j \equiv$  Número de observaciones que se repiten de cada grupo de repeticiones.

El estadístico de contraste que resulta es:

$$H^* = \frac{H}{f_c} = \frac{n^2 \cdot (n-1)}{n^2 \cdot (n-1) - \sum_j (\tau_j^3 - \tau_j)} \cdot \frac{12}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (n+1)$$

Se rechaza  $H_0$  cuando  $P(H^* \geq h_\alpha | H_0) = \alpha$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

■ Cuando se rechaza la hipótesis nula puede decirse que existen diferencias significativas.

Para obtener qué muestras presentan diferencias significativas se realiza el *test de comparaciones múltiples*, o *método de Dunn*, según el cual la diferencia entre las poblaciones i y j es significativa al nivel  $\alpha$  si:

$$|\bar{R}_i - \bar{R}_j| \geq c_{ij} \quad \bar{R}_i, \bar{R}_j \equiv \text{media de los rangos } R_i, R_j \text{ (respectivamente)}$$

$$\text{siendo } c_{ij} = z_p \sqrt{\frac{n \cdot (n+1)}{12} \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} \quad \text{con } P(z \geq z_p) = p = \frac{\alpha}{k \cdot (k-1)}$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Contraste de Kolmogorov-Smirnov

La prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra es un procedimiento de "bondad de ajuste", que permite medir el grado de concordancia existente entre la distribución de un conjunto de datos y una distribución teórica específica.

La prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra se puede utilizar para comprobar si una variable se distribuye normalmente.

- Contraste bilateral:

$H_0$ : La muestra procede de una distribución determinada

$H_1$ : La muestra no procede de una distribución determinada

Estadístico de contraste:  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| = \max (a_i, b_i)$

$$a_i = |F_n(x_i) - F_0(x_i)| \quad b_i = |F_n(x_{i-1}) - F_0(x_i)|$$

Se construye una tabla ordenando las observaciones y calculando  $F_0(x_i)$ ,  $F_n(x_i)$  y  $|F_0(x_i) - F_n(x_i)|$

$F_0(x_i)$  ≡ Función de distribución: DISTR.WEIBUL / DISTR.LOG.NORM / DISTR.EXP

$F_n(x_i)$  ≡ Función de distribución empírica de la muestra:  $F_n(x_i) = \frac{n^{\circ} \text{ observaciones}}{n} = \frac{N(x_i)}{n}$

Se acepta  $H_0$  si  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| < D_{\alpha, n}$  (valor crítico tabla Kolmogorov-Smirnov)

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Contraste de normalidad de Lilliefors

Cuando los datos no están agrupados y el tamaño muestral es pequeño no se utiliza el test de la Chi-cuadrado de Pearson de bondad de ajuste, sino los contrastes de normalidad de Lilliefors y de Shapiro-Wilk.

El estadístico del contraste de Lilliefors es el mismo que para el de Kolmogorov-Smirnov, pero construido sobre valores tipificados.

- Contraste bilateral:

$H_0$ : La muestra procede de una distribución determinada

$H_1$ : La muestra no procede de una distribución determinada

$$\text{El estadístico de contraste sobre los valores tipificados } z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} : D_n = \max |F_n(z_i) - F_0(z_i)|$$

Se construye una tabla ordenando las observaciones y calculando  $F_0(z_i)$ ,  $F_n(z_i)$  y creando las columnas  $a_i = |F_n(z_i) - F_0(z_i)|$  y  $b_i = |F_n(z_{i-1}) - F_0(z_i)|$

$F_0(z_i) \equiv$  Función de distribución de una  $N(0, 1)$ : DISTR.NORM.ESTAND( $z_i$ )

$F_n(z_i) \equiv$  Función de distribución empírica de la muestra tipificada:  $F_n(z_i) = \frac{\text{nº observaciones}}{n} = \frac{N(z_i)}{n}$

Se acepta  $H_0$  si  $D_n = \max |F_n(z_i) - F_0(z_i)| = \max(a_i, b_i) < D_{\alpha, n}$  (valor crítico tabla de Lilliefors)

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

 **Contraste de normalidad de Shapiro-Wilk**

■ **Contraste bilateral:**

Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ )

Se establecen las hipótesis:

$H_0$ : La muestra procede de una distribución normal

$H_1$ : La muestra no procede de una distribución normal

$$\text{Estadístico contraste: } W = \frac{\left( \sum_{i=1}^k a_i \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad k = \begin{cases} n/2 & n \text{ par} \\ (n-1)/2 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$x_i$  ≡ Estadístico ordenado de orden i

$a_i$  ≡ Coeficientes para cada  $(x_{n-i+1} - x_i)$ , con  $(n, i=1, 2, \dots, k)$  valores de la tabla de Shapiro-Wilk

Se rechaza la hipótesis de normalidad  $H_0$  cuando  $W < W_{\alpha, n}$  (valor crítico de Shapiro-Wilk)

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

**Contraste de la Mediana**

Tiene como objetivo comparar las medianas de dos muestras y determinar si pertenecen a la misma población o no.

- Contraste bilateral:  $H_0: M_{e_x} = M_{e_y}$      $H_1: M_{e_x} \neq M_{e_y}$

Estadístico de contraste:  $V =$  Número de observaciones de  $X$  menores o iguales que la mediana de la muestra conjunta de  $n_1 + n_2$  elementos.

Cuando la muestra es grande  $n_1 > 10$  y  $n_2 > 10$  se aproxima mediante una distribución normal:

$V \sim N(E[V], \text{Var}[V])$  donde,

$$E[V] = k \cdot \frac{n_1}{n} \quad \text{Var}[V] = k \cdot \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_2}{n} \cdot \frac{n-k}{n-1} \quad k = \begin{cases} n/2 & n \text{ es par} \\ (n-1)/2 & n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_p = \frac{|V - E[V]|}{\sqrt{\text{Var}[V]}} \leq z_{\alpha/2}$$

- Contraste unilateral a la derecha:  $H_0: M_{e_x} \leq M_{e_y}$      $H_1: M_{e_x} > M_{e_y}$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_p = \frac{V - E[V]}{\sqrt{\text{Var}[V]}} \leq z_{\alpha/2}$$

- Contraste unilateral a la izquierda:  $H_0: M_{e_x} \geq M_{e_y}$      $H_1: M_{e_x} < M_{e_y}$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_p = \frac{V - E[V]}{\sqrt{\text{Var}[V]}} \geq -z_\alpha$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Contraste de la U de Wilcoxon-Mann-Whitney

Prueba no paramétrica aplicada a dos muestras independientes, versión no paramétrica de la prueba t de Student. Es de las pruebas más potentes de entre las no paramétricas.

Sean dos variables aleatorias continuas  $X_1$  y  $X_2$  y los datos muestrales constituyen muestras aleatorias independientes, denotando por F y G las respectivas funciones de distribución.

- Contraste bilateral:  $H_0: F(x) = G(x)$     $H_1: F(x) \neq G(x)$

Estadístico de contraste:  $U = U_{x_1} = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - W_{x_1}$

siendo  $W_{x_1} \equiv \sum_{i=1}^n R_i$  suma de rangos de la muestra  $X_1$

Cuando el tamaño de la muestra es grande ( $n_1 > 10$  y  $n_2 > 10$ ) la distribución del estadístico de prueba se aproxima a una normal:

$$U = U_{x_1} \xrightarrow[n_1, n_2 > 10]{H_0} N\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{2}, \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{12}}\right)$$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_p = \frac{\left| U - \frac{n_1 \cdot n_2}{2} \right|}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} \leq z_{\alpha/2}$$

- Contraste unilateral derecha:  $H_0: F(x) \leq G(x)$     $H_1: F(x) > G(x)$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_p = \frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} \leq z_\alpha$$

- Contraste unilateral izquierda:  $H_0: F(x) \geq G(x)$     $H_1: F(x) < G(x)$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_p = \frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} \geq -z_\alpha$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Contraste de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras

- Contraste bilateral:  $H_0: F(x) = G(x)$     $H_1: F(x) \neq G(x)$

Se basa en un estadístico de prueba que utiliza las funciones de distribución empíricas de las muestras.

Estadístico de contraste:  $D_{n_1, n_2} = \max |F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)|$

$$\text{con } F_{n_1}(x) = \frac{N_1(x)}{n_1} \quad F_{n_2}(x) = \frac{N_2(x)}{n_2}$$

Se rechaza  $H_0$  si  $D_{n_1, n_2} > D_{\alpha, n_1, n_2}$

Donde el valor crítico  $D_{\alpha, n_1, n_2}$  verifica:  $P[D_{n_1, n_2} > D_{\alpha, n_1, n_2} | H_0] = \alpha$

En muestras pequeñas el valor crítico  $D_{\alpha, n_1, n_2}$  encuentra en la tabla de valores críticos de

Kolmogorov-Smirnov. Para muestras grandes ( $N_1 > 10$  y  $N_2 > 10$ ) el valor crítico:

$$D_{\alpha, n_1, n_2} = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} \cdot C_{KS} \text{ donde } C_{KS} \equiv \text{coeficiente tabla Kolmogorov-Smirnov}$$

- Contraste unilateral a la derecha  $H_0: F(z) \leq G(z)$     $H_1: F(z) > G(z)$

Estadístico de contraste:  $D_{n_1, n_2}^+ = \max [F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)]$

Se rechaza  $H_0$  si  $D_{n_1, n_2}^+ > D_{\alpha, n_1, n_2}$

- Contraste unilateral a la izquierda:  $H_0: F(z) \geq G(z)$     $H_1: F(z) < G(z)$

Estadístico de contraste:  $D_{n_1, n_2}^- = \max [G_{n_2}(x) - F_{n_1}(x)]$

Se rechaza  $H_0$  si  $D_{n_1, n_2}^- > D_{\alpha, n_1, n_2}$

Valores críticos del test de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras de distintos tamaños  $n_1 \neq n_2$

		Nivel de significación $\alpha$				
		$\alpha = 0,10$	$0,05$	$0,025$	$0,01$	$0,005$
Test unilateral						
Test bilateral		$\alpha = 0,20$	$0,10$	$0,050$	$0,02$	$0,01$
Aproximación para $n_1$ y $n_2$ grandes		$\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \times 1,0730$	1,2239	1,3581	1,5174	1,6276

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Prueba homogeneidad de variaciones de Ansari-Bradley

Mientras que para muestras paramétricas la prueba de Levene comprueba la igualdad de varianzas de dos poblaciones.

En muestras no paramétricas, bajo el supuesto de poblaciones continuas, se emplea la prueba de Ansari-Bradley para analizar la homogeneidad de las variaciones (varianzas, desviaciones típicas, coeficientes de variación)

- **Contraste bilateral:**  $H_0: \sigma_A = \sigma_B$      $H_1: \sigma_A \neq \sigma_B$

Estadístico contraste:  $W = \sum_{i=1}^n c_i \cdot R_i$      $c_i = \begin{cases} 1 & \text{valor de A} \\ 0 & \text{valor de B} \end{cases}$

Se asigna a cada valor un coeficiente  $R_i$ :

$$n \equiv \text{impar}: R_i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}, \dots, 3, 2, 1 \quad n \equiv \text{par}: R_i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}, \dots, 3, 2, 1$$

Cuando el tamaño de la muestra conjunta  $n = n_A + n_B > 20$  se emplea la aproximación asintótica a una distribución normal  $N(0, 1)$

Estadístico de contraste:  $z_p = \frac{|W - E[W]|}{\sqrt{\text{Var}[W]}}$

Se acepta  $H_0$  cuando  $z_p = \frac{|W - E[W]|}{\sqrt{\text{Var}[W]}} \leq z_{\alpha/2}$

- **Contraste unilateral a la derecha:**  $H_0: \sigma_A \leq \sigma_B$      $H_1: \sigma_A > \sigma_B$

Estadístico de contraste:  $z_p = \frac{W - E[W]}{\sqrt{\text{Var}[W]}}$

Se acepta  $H_0$  cuando  $z_p = \frac{W - E[W]}{\sqrt{\text{Var}[W]}} \leq z_\alpha$

- Cuando el tamaño de la muestra es impar:

$$E(W) = \frac{n_A \cdot (n+1)^2}{4 \cdot n} \quad V(W) = \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n+1) \cdot (n^2+3)}{48 \cdot n^2}$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Cuando hay presencia de valores repetidos se utiliza una varianza corregida:

$$E(W) = \frac{n_A \cdot (n+1)^2}{4 \cdot n} \quad V_c(W) = \frac{n_A \cdot n_B \cdot \sum_{i=1}^g t_h \cdot R_h^2}{n \cdot (n-1)} - \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n+1)^4}{16 \cdot n^2 \cdot (n-1)}$$

- Cuando el tamaño de la muestra es par:

$$E(W) = \frac{n_A \cdot (n+2)^2}{4} \quad V(W) = \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n^2 - 4)}{48 \cdot n^2}$$

Cuando hay presencia de valores repetidos se utiliza una varianza corregida:

$$V_c(W) = \frac{n_A \cdot n_B \cdot \sum_{i=1}^g t_h \cdot R_h^2}{n \cdot (n-1)} - \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n+2)^2}{16 \cdot (n-1)}$$

$g \equiv$  Número de rangos diferentes cuando aparecen observaciones repetidas

$t_h \equiv$  Tamaño h-ésimo grupo

$R_h \equiv$  Rango medio h-ésimo grupo

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Prueba homogeneidad de variaciones de Siegel-Tukey

Permite contrastar si dos muestras independientes proceden de poblaciones con la misma variabilidad o dispersión.

- **Contraste bilateral:**  $H_0: \sigma_x = \sigma_y$      $H_1: \sigma_x \neq \sigma_y$  /     $H_0: Me_x = Me_y$      $H_1: Me_x \neq Me_y$

Estadístico contraste:  $R_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot c_i$

La muestra conjunta en orden ascendente, el coeficiente instrumental  $c_i = \begin{cases} 1 & \text{valor de } X \\ 0 & \text{valor de } Y \end{cases}$  primero

se asignan en orden los 1 y después los 0.

$a_i$  ≡ Coeficientes obtenidos al asignar los rangos según el método de Siegel-Tukey: La clasificación se realiza alternando extremos (el rango 1 es el más bajo, 2 y 3 son los dos más altos, 4 y 5 son los dos más bajos, y así sucesivamente).

Cuando el número total de observaciones es un número impar, se ignorará la observación central.

La función indicadora  $a_i = \begin{cases} 2i & i \text{ par } 1 < i < N/2 \\ 2i-1 & i \text{ impar } 1 \leq i \leq N/2 \\ 2(N-i)+2 & i \text{ par } N/2 < i \leq N \\ 2(N-i)+1 & i \text{ impar } N/2 < i < N \end{cases}$

La distribución de probabilidad de  $R_n$  es la misma que la del estadístico *U de Wilcoxon-Mann-Whitney*, por lo que se puede recurrir a la tabla de valores críticos del mismo.

Cuando las muestras son grandes ( $n_1 > 10$  y  $n_2 > 10$ ) se emplea la aproximación asintótica a una distribución normal  $N(0, 1)$ :

$$z_p = \frac{|R_n - E[R_n]|}{\sqrt{V[R_n]}} \quad \text{donde, } E[R_n] = \frac{n_1 \cdot (n+1)}{2} \quad V[R_n] = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n+1)}{12}$$

Se acepta  $H_0$  sí  $z_p \leq z_{\alpha/2}$

- **Contraste unilateral a la derecha:**  $H_0: \sigma_x \leq \sigma_y$      $H_1: \sigma_x > \sigma_y$

Se acepta  $H_0$  sí  $z_p = \frac{R_n - E[R_n]}{\sqrt{V[R_n]}} \leq z_\alpha$

Asignatura..... Grupo.....  
Apellidos..... Nombre.....  
Ejercicio del día.....



Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

1. Un inversor tiene acciones en diferentes sectores del mercado continuo de valores. Después de quedarse sin asesor, para tener idea sobre la cotización de sus acciones seleccionó nueve sociedades en las que participaba y revisó sus cotizaciones de cierre el pasado viernes:

Sociedades	Cotización compra	Cotización actual
Acerinox	10,07	9,92
Bankinter	7,70	7,85
Bankia	3,98	4,37
Caixabank	2,56	1,44
Mapfre BBVA	3,05	3,05
IAG Telefónica	4,41	3,32
Mercadona	6,73	6,46
	7,85	8,09
	2,95	2,95

A un nivel de significación del 5%, ¿puede afirmarse que no hay diferencia significativa entre el valor de las acciones en las sociedades en las que participa este inversor?

Nota: Utilizar la prueba de rangos con signos de Wilcoxon

#### Solución:

La *prueba de rangos con signos de Wilcoxon* para dos muestras pareadas y la variable de respuesta ordinal o cuantitativa es la prueba homóloga no paramétrica a la prueba paramétrica t de Student para muestras pareadas.

Se utiliza como alternativa de la *prueba t de Student* cuando no se puede suponer la normalidad de las muestras.

Se establecen las hipótesis:

$H_0$ : No hay diferencias en valor de las acciones en las que participa el inversor

$H_1$ : El valor de las acciones actuales es inferior al valor de compra

Se introducen los datos en SPSS en Vista de variables:

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

\*acciones-bolsa.sav [Conjunto\_de\_datos1] - Editor de datos SPSS

	Nombre	Tipo	Anchura	Decimales	Etiqueta	Valores	Perdidos	Columnas	Alineación	Medida
1	Sociedad	Numérico	8	0		[1, Acerinox]...	Ninguno	8	Centrado	Escala
2	Cotización_c	Numérico	8	2		Ninguno	Ninguno	11	Centrado	Escala
3	Cotización_ac	Numérico	8	2		Ninguno	Ninguno	12	Centrado	Escala
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										

Vista de datos Vista de variables /

SPSS El procesador está preparado

\*acciones-bolsa.sav [Conjunto\_de\_datos1] - Editor de datos SPSS

	Sociedad	Cotización_c
1	<b>Acerinox</b>	<b>10,07</b>
2	<b>Bankinter</b>	<b>7,70</b>
3	<b>Bankia</b>	<b>3,98</b>
4	<b>Caixabank</b>	<b>2,56</b>
5	<b>Mapfre</b>	<b>3,05</b>
6	<b>BBVA</b>	<b>4,41</b>
7	<b>IAG</b>	<b>6,73</b>
8	<b>Telefónica</b>	<b>7,85</b>
9	<b>Mercadona</b>	<b>2,95</b>
10		
11		
12		
13		
14		

Vista de datos Vista de variables /

2 muestras relacionadas

SPSS El procesador está preparado

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



#### Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

Rangos

		N	Rango promedio	Suma de rangos
Cotización_actual - Cotización_compra	Rangos negativos	4 <sup>a</sup>	4,63	18,50
	Rangos positivos	3 <sup>b</sup>	3,17	9,50
	Empates	2 <sup>c</sup>		
	Total	9		

- a. Cotización\_actual < Cotización\_compra
- b. Cotización\_actual > Cotización\_compra
- c. Cotización\_actual = Cotización\_compra

Estadísticos de contraste<sup>b</sup>

	Cotización_actual - Cotización_compra
Z	-,762 <sup>a</sup>
Sig. asintót. (bilateral)	,446

- a. Basado en los rangos positivos.
- b. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

Como el p\_valor (Sig. asintótica bilateral) = 0,446 > 0,05 se acepta la hipótesis nula y se concluye que no hay diferencias en el valor de las acciones de las sociedades en que participa el inversor.

$$z = \frac{T_+ - \frac{n \cdot (n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24} - \sum_{i=1}^k \frac{t_i^3 - t_i}{48}}}$$

$$T_+ = \sum R_i^+ \quad T_- = \sum R_i^- \quad T = \min(T_+, T_-)$$

k ≡ número de rangos distintos en donde hay empates

t<sub>i</sub> ≡ número puntuaciones empatadas en el rango i-ésimo

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



La prueba no paramétrica de Wilcoxon sirve para rechazar o no la diferencia estadísticamente significativa entre dos conjuntos de observaciones que tienen una

distribución cualesquiera desconocida. La prueba consiste en lo siguiente:

- Se calculan las diferencias de dos observaciones
- Se jerarquiza en orden ascendente el valor absoluto de las diferencias
- Se suman las jerarquizaciones de las diferencias positivas, denominando a la suma con el símbolo  $T_+ = \text{Suma de rangos de las } D_i > 0$
- Se calculan los valores críticos  $\bar{T}$  de la tabla para el test de rangos-signos de Wilcoxon
- Si  $T_+ < T_{\alpha, n}$  no existe diferencia significativa entre las observaciones a un nivel de significación  $\alpha$

*La prueba de Wilcoxon supone que la distribución de las diferencias es continua, simétrica, independiente y que las diferencias tienen la misma mediana.*

Sociedad	Cotización compra	Cotización actual	Diferencia $D_i$	Diferencia absoluta $ D_i $	Jerarquía ascendente	Rango Diferencias $R_i$	$R_i^-$	$R_i^+$
1	10,07	9,92	0,15	0,15	4	2	1,5	1,5
2	7,7	7,85	-0,15	0,15	3	1	1,5	
3	3,98	4,37	-0,39	0,39	7	5	5	
4	2,56	1,44	1,12	1,12	9	7	7	7
5	3,05	3,05	0	0	1			
6	4,41	3,32	1,09	1,09	8	6	6	6
7	6,73	6,46	0,27	0,27	6	4	4	4
8	7,85	8,09	-0,24	0,24	5	3	3	
9	2,95	2,95	0	0	1			
							18,5	9,5

Para obtener los rangos, los valores absolutos de las diferencias  $|D_i|$  se jerarquizan en orden ascendente (de menor a mayor) y se asignan los rangos o números de orden desde 1 hasta  $n$  (en este caso,  $n = 1, \dots, 9$ ). Si existen valores de  $|D_i|$  repetidos, el rango correspondiente será el promedio de los que se les asignarían si fueran diferentes.

Cuando hay diferencias nulas no se tienen en cuenta, el tamaño muestral se reduce en el número de observaciones menos el número de diferencias nulas.

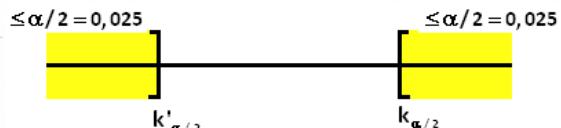
- ✓ En este caso, hay dos diferencias nulas y el tamaño muestral es  $n = 9 - 2 = 7$ , con lo que los rangos o números de orden van de 1 a 7. Por otra parte, la sociedad 1 y 2 presentan el mismo valor  $|D_i|$  por lo que el rango de cada una de ellas será el promedio que se les asignarían si fueran diferentes  $(1+2)/2 = 1,5$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$$T_+ = \sum R_i^+ = 9,5 \quad T_- = \sum R_i^- = 18,5$$

El valor experimental es  $\hat{T}_+ = \sum R_i^+ = 1,5 + 5 + 3 = 9,5$

Al tratarse de un contraste bilateral, la región crítica tendrá dos colas:



$$P(T_+ \leq k'_{\alpha/2, n}) \leq \alpha/2 \equiv P(T_+ \leq k'_{0,025, 7}) \leq 0,025 \rightarrow k'_{0,025, 7} = 2$$

$$P(T_+ \geq k_{\alpha/2, n}) \leq \alpha/2 \equiv P(T_+ \geq k_{0,025, 7}) \leq 0,05 = P(T_+ \leq k_{0,025, 7}) \leq 1 - 0,025 = 0,975 \rightarrow k_{0,025, 7} = 26$$

Así pues, como  $k'_{0,025, 7} = 2 < \hat{T}_+ = 9,5 < 26 = k_{0,025, 7}$  se acepta la hipótesis nula, afirmando que no hay diferencias en el valor de las acciones de las sociedades en que participa el inversor.

#### Valores críticos para el test de rangos-signos de Wilcoxon

$$T_+ = \sum_{i=1}^n z_i \cdot \text{rango}(|D_i|)$$

$\alpha^*$	$P(T_+ \leq k_\alpha) \leq \alpha$					$P(T_+ \geq k_\alpha) \leq 1 - \alpha$				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
n	—	—	—	—	0	10	—	—	—	—
4	—	—	—	—	0	10	—	—	—	—
5	—	—	—	0	2	13	15	—	—	—
6	—	—	0	2	3	18	19	21	—	—
7	—	0	2	3	5	23	25	26	28	—
8	0	1	3	5	8	28	31	33	35	36
9	1	3	5	8	10	35	37	40	42	44
10	3	5	8	10	14	41	45	47	50	52
11	5	7	10	13	17	49	53	56	59	61
12	7	9	13	17	21	57	61	65	69	71
13	9	12	17	21	26	65	70	74	79	82
14	12	15	21	25	31	74	80	84	90	93
15	15	19	25	30	36	84	90	95	101	105

$\alpha^*$  no tiene por qué coincidir con el nivel de significación

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

2. Se emplean dos estrategias de ventas (A y B) de un mismo producto en veinte ciudades. El volumen de ventas anuales del mismo producto en cada ciudad (en miles de euros) por tipo de estrategia, está reflejado en la tabla adjunta. ¿Existe alguna diferencia significativa entre las estrategias de ventas a un nivel de significación del 5%?

Ventas (miles euros)		
Ciudad	A	B
1	12,36	11,32
2	15,65	10,21
3	9,83	9,79
4	18,37	19,21
5	11,72	11,43
6	13,04	12,96
7	10,15	9,81
8	15,41	14,65
9	11,07	11,79
10	12,31	11,05

Ventas (miles euros)		
Ciudad	A	B
11	10,15	10,03
12	13,15	13,02
13	14,65	12,05
14	11,47	12,62
15	13,15	12,96
16	15,67	14,97
17	13,12	13,65
18	10,17	9,87
19	14,78	14,17
20	9,63	10,17

### Solución:

Se trata de un contraste bilateral o de dos colas donde se establecen las hipótesis:

$H_0$ : No existe diferencia en la estrategia de ventas

$H_1$ : La estrategia de ventas son distintas

Se aplica la prueba de Wilcoxon suponiendo que la distribución de las diferencias en las estrategias de ventas es continua, simétrica, independiente y tienen la misma mediana.

Valores críticos  $T$  para la prueba de Wilcoxon

N	$0.01 < \alpha \leq 0.05$	$\alpha \leq 0.01$
5	14	—
6	19	—
7	21	28
8	30	34
9	37	42
10	44	50
12	61	68
14	79	89
16	100	112
18	124	138
20	150	167

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

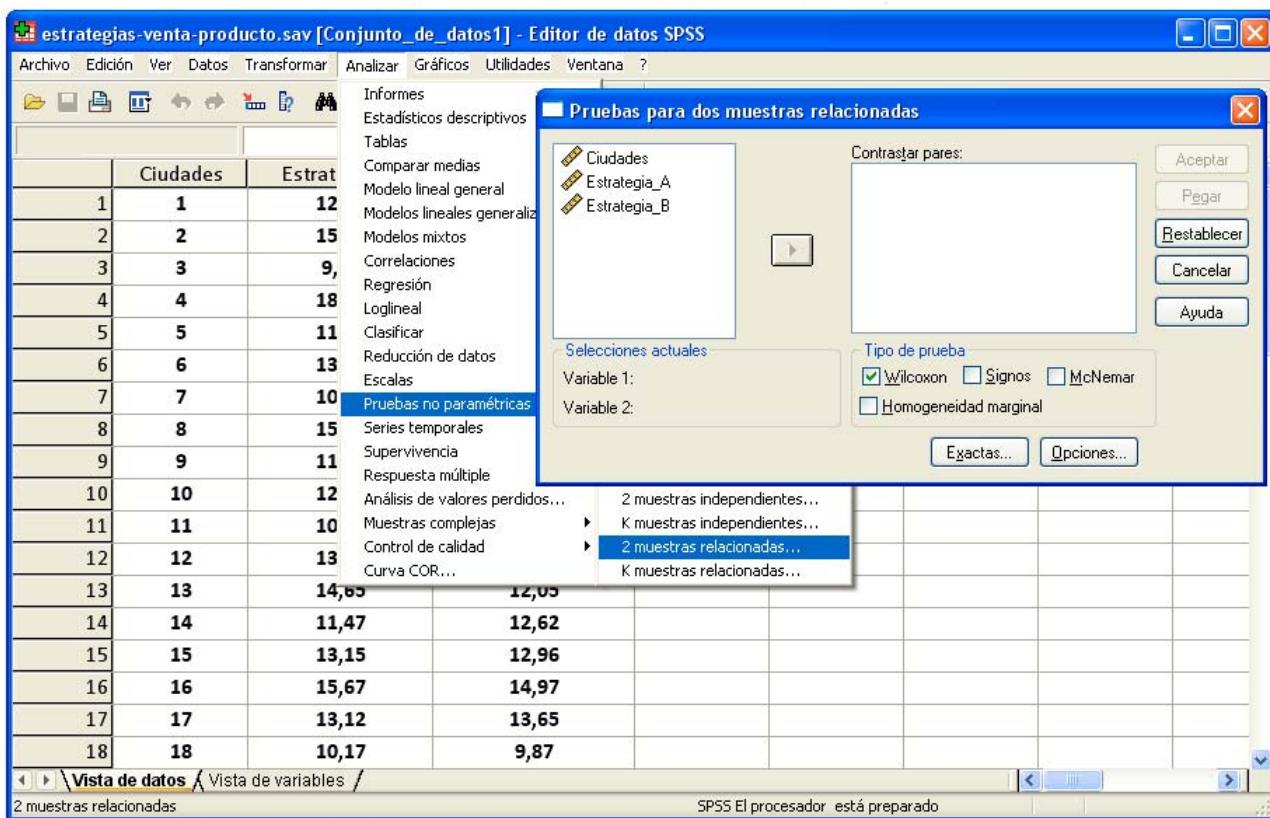
Estrategias de ventas de un producto							
Ciudad	A	B	D <sub>i</sub> = A - B	D <sub>i</sub>	Jerarquización ascendente	R <sub>i</sub> <sup>-</sup>	R <sub>i</sub> <sup>+</sup>
1	12,36	11,32	1,04	1,04	16		16
2	15,65	10,21	5,44	5,44	20		20
3	9,83	9,79	0,04	0,04	1		1
4	18,37	19,21	-0,84	0,84	15	15	
5	11,72	11,43	0,29	0,29	6		6
6	13,04	12,96	0,08	0,08	2		2
7	10,15	9,81	0,34	0,34	8		8
8	15,41	14,65	0,76	0,76	14		14
9	11,07	11,79	-0,72	0,72	13	13	
10	12,31	11,05	1,26	1,26	18		18
11	10,15	10,03	0,12	0,12	3		3
12	13,15	13,02	0,13	0,13	4		4
13	14,65	12,05	2,6	2,6	19		19
14	11,47	12,62	-1,15	1,15	17	17	
15	13,15	12,96	0,19	0,19	5		5
16	15,67	14,97	0,7	0,7	12		12
17	13,12	13,65	-0,53	0,53	9	9	
18	10,17	9,87	0,3	0,3	7		7
19	14,78	14,17	0,61	0,61	11		11
20	9,63	10,17	-0,54	0,54	10	10	
					64	146	

$$T_+ = \sum R_i^+ = 146 \quad T_- = \sum R_i^- = 64$$

$$\text{El valor experimental es } \hat{T}_+ = \sum R_i^+ = 146$$

Como el valor experimental  $\hat{T}_+ = 146 < 150 = T_{0,05, 20}$  se acepta la hipótesis nula de igualdad de estrategias de venta.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



### Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

Rangos

		N	Rango promedio	Suma de rangos
Estrategia_B - Estrategia_A	Rangos negativos	15 <sup>a</sup>	9,73	146,00
	Rangos positivos	5 <sup>b</sup>	12,80	64,00
	Empates	0 <sup>c</sup>		
	Total	20		

- a. Estrategia\_B < Estrategia\_A
- b. Estrategia\_B > Estrategia\_A
- c. Estrategia\_B = Estrategia\_A

Estadísticos de contraste<sup>b</sup>

	Estrategia_B - Estrategia_A
Z	-1,531 <sup>a</sup>
Sig. asintót. (bilateral)	,126

- a. Basado en los rangos positivos.
- b. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

El p\_valor (Sig. asintótica bilateral) = 0,126 > 0,05 con lo que se acepta la hipótesis nula, concluyendo que no existe diferencia en las estrategias de venta del producto con una significación de 0,05

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

3. Una empresa inicialmente establece una jerarquía entre diez agentes vendedores de acuerdo a los resultados obtenidos en un test (el más idóneo es 1, el peor es 10). Un año después se replantea una nueva jerarquía con el mismo criterio de acuerdo al volumen de ventas anuales. Los resultados obtenidos se plasman en la tabla adjunta.

¿Existe alguna diferencia estadísticamente significativa entre ambos controles a un nivel de significación del 5%?

Jerarquía empresarial		
Vendedor	Test	Ventas
Alonso	4	1
Espinosa	5	6
Jiménez	2	2
Fernández	10	8
Crespo	7	9
García	1	3
Mateos	8	4
Cortes	3	5
Rodenas	9	10
Cabildo	7	7

### Solución:

Se establecen las hipótesis:

$H_0$ : Los controles de capacitación son independientes

$H_1$ : Los controles de capacitación son dependientes

Se trata de un contraste bilateral o de dos colas

Se utiliza la prueba de Spearman Rho para aceptar o no la diferencia estadísticamente significativa entre los dos conjuntos de observaciones de tipo cardinal u ordinal.

El

coeficiente de correlación de Spearman Rho, al igual que el de Pearson, muestra una asociación entre variables que no se comportan normalmente, entre variables ordinales. Procede de la siguiente manera:

a) Se calculan las diferencias  $D_i$  entre las 10 observaciones

$$6 \cdot \sum_{i=1}^n D_i^2$$

b) El coeficiente de Spearman  $\rho$  viene dado por la expresión  $\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n D_i^2}{n \cdot (n^2 - 1)}$

c) El coeficiente se compara con un coeficiente crítico  $\rho_{\alpha, n}$  dado en la tabla siguiente:

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Valores críticos  $\rho_{\alpha,n}$  para la prueba de Spearman Rho

$N$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
5	0.70	0.80	0.90
10	0.44	0.55	0.73
15	0.35	0.44	0.60
20	0.30	0.38	0.52
25	0.26	0.34	0.47
30	0.24	0.31	0.43

Sí  $\rho \leq \rho_{\alpha,n}$  se acepta la hipótesis nula de independencia significativa entre las observaciones. En caso contrario, las observaciones son dependientes a un nivel de significación  $\alpha$

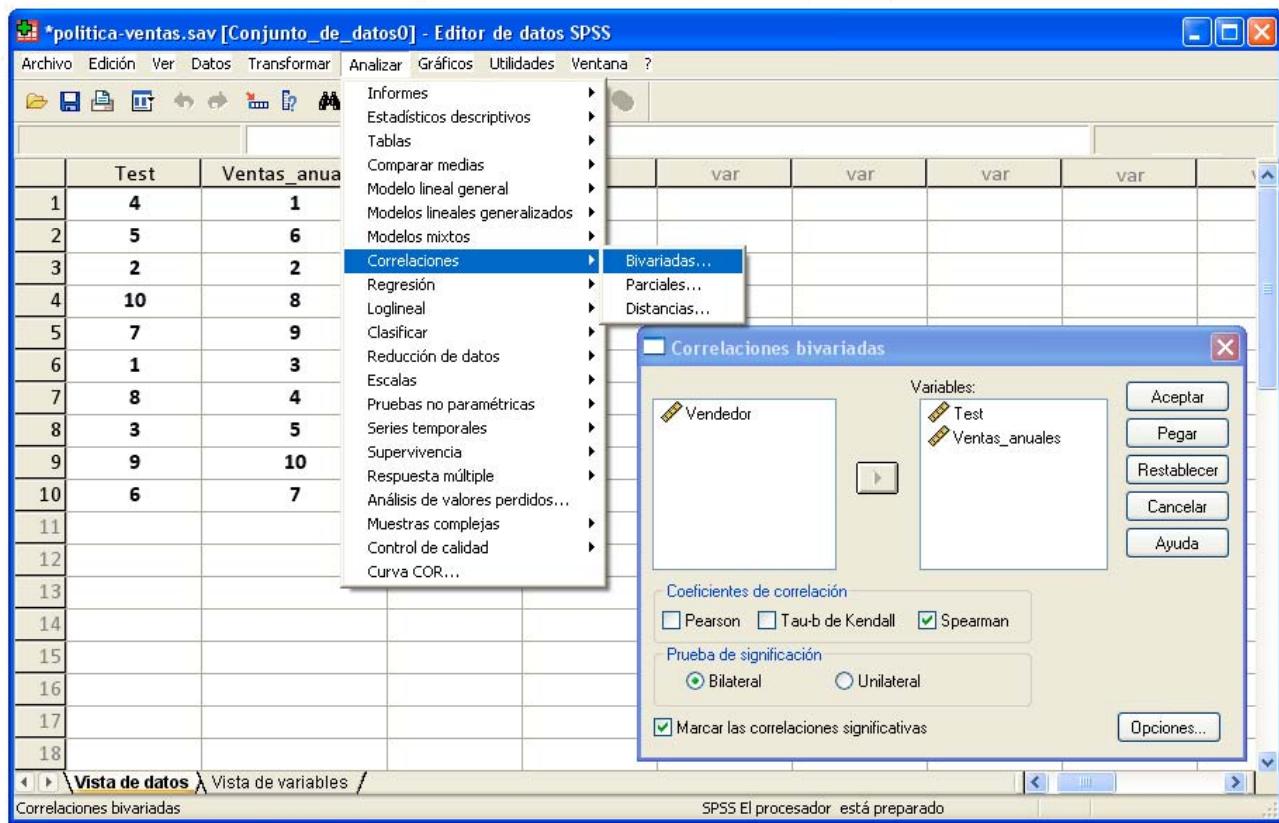
	Jerarquización Ordinal			
Vendedor	X	Y	$D_i = X - Y$	$D_i^2$
1	4	1	3	9
2	5	6	-1	1
3	2	2	0	0
4	10	8	2	4
5	7	9	-2	4
6	1	3	-2	4
7	8	4	4	16
8	3	5	-2	4
9	9	10	-1	1
10	6	7	-1	1

$\sum_{i=1}^{10} D_i^2 = 44$

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n D_i^2}{n \cdot (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{10} D_i^2}{10 \cdot (10^2 - 1)} = 0,733$$

Puesto que  $\rho = 0,733 > 0,55 = \rho_{0,05,10}$  se rechaza la hipótesis nula admitiendo que las observaciones de control de capacitación son dependientes. En definitiva, la habilidad demostrada en el test está ligada a su desempeño en la vida real.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



The screenshot shows the SPSS Data Editor window with a dataset containing columns 'Test' and 'Ventas\_anuales'. The 'Analizar' menu is open, and the 'Correlaciones' submenu is selected, with 'Bivariadas...' highlighted. A sub-dialog box titled 'Correlaciones bivariadas' is displayed, showing the variables 'Vendedor', 'Test', and 'Ventas\_anuales' selected for analysis. Correlation coefficients and significance levels are listed below.

	Test	Ventas_anuales
1	4	1
2	5	6
3	2	2
4	10	8
5	7	9
6	1	3
7	8	4
8	3	5
9	9	10
10	6	7
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		

### Correlaciones

Rho de Spearman	Test	Coefficiente de correlación	Test	Ventas_anuales
		Sig. (bilateral)	.	,016
		N	10	10
	Ventas_anuales	Coefficiente de correlación	,733*	1,000
		Sig. (bilateral)	,016	.
		N	10	10

\*. La correlación es significativa al nivel 0,05 (bilateral).

El p\_valor (Sig. bilateral) = 0,016 < 0,05 por lo que se rechaza la hipótesis nula, afirmando que los dos controles de capacitación están relacionados. Por otra parte, el coeficiente de correlación de Spearman es alto, con una correlación positiva, a medida que aumenta el nivel del test aumenta el volumen de ventas anual de los agentes.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

4. El director de una agencia de viajes, para diseñar un conjunto de estrategias publicitarias, está interesado en tener información sobre las edades de los compradores de un determinado paquete de viajes. Por este motivo, decide registrar la edad de las personas que compran este tipo de oferta de viajes, obteniendo la secuencia:

34	26	27	31	28	32	23	26	29	36
40	25	42	23	20	29	31	34	28	24
23	35	29	34	32	31	25	24	30	31
37	29	28	27						

Con una significación del 5% se pide:

- a) Se admite la aleatoriedad en la serie de edades
- b) Observando los datos, ¿se puede afirmar que las personas que compran este paquete de viajes tienen al menos 30 años?

**Solución:**

- a) Para verificar si la sucesión de edades es aleatoria, se realiza el contraste bilateral:

$$H_0: \text{La muestra es aleatoria} \quad H_1: \text{La muestra no es aleatoria}$$

Para ello se acude a la prueba de rachas de Wald-Wolfowitz que permite verificar la hipótesis nula de que la muestra es aleatoria, es decir, si las sucesivas observaciones son independientes.

El estadístico de prueba del test de rachas de Wald-Wolfowitz es:

$$R = \text{"Número de rachas en la muestra"}$$

El contraste se basa en el número de rachas que presenta la muestra. Una racha es una secuencia de valores muestrales con una característica en común precedida y seguida por valores que no presentan esa característica.

En esta línea, se considera una racha la secuencia de  $k$  valores consecutivos superiores o iguales a un valor de corte (media, mediana, moda, ...) siempre que se encuentran precedidos y seguidos por valores inferiores a este valor de corte.

El número total de rachas en una muestra proporciona un indicio de sí hay o no aleatoriedad en la muestra. Un número reducido de rachas (el caso extremo es 2) es indicio de que las observaciones no se han extraído de forma aleatoria, los elementos de la primera racha proceden de una población con una determinada característica (valores mayores o menores al punto de corte) mientras que los de la segunda proceden de otra población.

De forma idéntica un número excesivo de rachas puede ser también indicio de no aleatoriedad de la muestra.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Si la muestra es suficientemente grande y la hipótesis de aleatoriedad es cierta, la distribución muestral del número de rachas  $R$  puede aproximarse mediante una distribución normal de parámetros:

$$E(R) = \frac{2n_1 n_2}{n} + 1 \quad \text{Var}(R) = \sqrt{\frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n)}{n^2 (n-1)}}$$

Se acepta la hipótesis nula cuando  $z_R = \frac{|R + c - E(R)|}{\text{Var}(R)} \leq z_{\alpha/2}$

$R < E(R) \rightarrow c = 0,5$
$R > E(R) \rightarrow c = -0,5$

- ✓ Como las observaciones son cuantitativas, se construye una sucesión dicotómica asignando a cada observación el signo de su desviación respecto a la mediana muestral, es decir:

$$D_i = X_i - m_e$$

Como los datos  $n = 34$  (par), la mediana una vez ordenados los datos en orden ascendente, será el valor medio de las observaciones centrales (lugares 17 y 18), con lo cual,

$$m_e = \frac{29 + 29}{2} = 29$$

El signo de  $D_i = X_i - 29$  a partir de la serie original será:

+	-	-	+	-	+	-	-	0	+
+	-	+	-	-	0	+	+	-	-
-	+	0	+	+	+	-	-	+	+
+	0	-	-						

Como hay cuatro observaciones iguales a la mediana se ignoran y se reduce el tamaño de la muestra a  $n = 34 - 4 = 30$  observaciones, donde:

$$n_1 = \text{"Números con signo positivo"} = 15 > 10$$

$$n_2 = \text{"Números con signo negativo"} = 15 > 10$$

Al ser  $n_1, n_2 > 10$  se puede utilizar la aproximación normal:

$$E(R) = \frac{2n_1 n_2}{n} + 1 = \frac{2 \cdot 15 \cdot 15}{30} + 1 = 16$$

$$\text{Var}(R) = \sqrt{\frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n)}{n^2 (n-1)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 15 (2 \cdot 15 \cdot 15 - 30)}{30^2 \cdot (30-1)}} = 2,691$$

$$z_R = \frac{|R + c - E(R)|}{\text{Var}(R)} = \frac{|16 - 16|}{2,691} = 0$$

Como  $-z_{0,025} = -1,96 < z_R = 0 < 1,96 = z_{0,025}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Se acepta la hipótesis nula de aleatoriedad de la serie de edades con una significación del 5%

 Cuando  $n_1 > 10$  y  $n_2 > 10$  se puede aplicar la distribución asintótica normal de Wald y

Wolfowitz, denotando por  $\gamma = \frac{n_1}{n}$  la proporción de observaciones de una categoría en la muestra de tamaño  $n$  se verifica que:  $R \xrightarrow{d} N[2\gamma(1-\gamma)n, 2\gamma(1-\gamma)\sqrt{n}]$

En esta línea,  $\gamma = \frac{n_1}{n} = \frac{15}{30} = 0,5$ , quedando la distribución normal:

$$R \sim N[2 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5) \cdot 30, 2 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5) \sqrt{30}] \equiv N(15, 2,74)$$

Los valores críticos  $k_1$  y  $k_2$  se determinan con el valor de significación  $\alpha = 0,05$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= P[ET1] = P[Rechazar H_0 | H_0 \text{ Cierta}] = P[|R| / N(15, 2,74)] = \\ &= P[(R \leq k_1) \cup (R \geq k_2) / N(15, 2,74)] = P\left[\frac{R - 15}{2,74} \leq \frac{k_1 - 15}{2,74}\right] + P\left[\frac{R - 15}{2,74} \geq \frac{k_2 - 15}{2,74}\right] = \\ &= P\left[z \leq \frac{k_1 - 15}{2,74}\right] + P\left[z \geq \frac{k_2 - 15}{2,74}\right] = 0,025 + 0,025 \end{aligned}$$

$$P\left[z \leq \frac{k_1 - 15}{2,74}\right] = P\left[z \geq \frac{-k_1 + 15}{2,74}\right] = 0,025 \rightarrow \frac{-k_1 + 15}{2,74} = 1,96 \rightarrow k_1 = 9,63$$

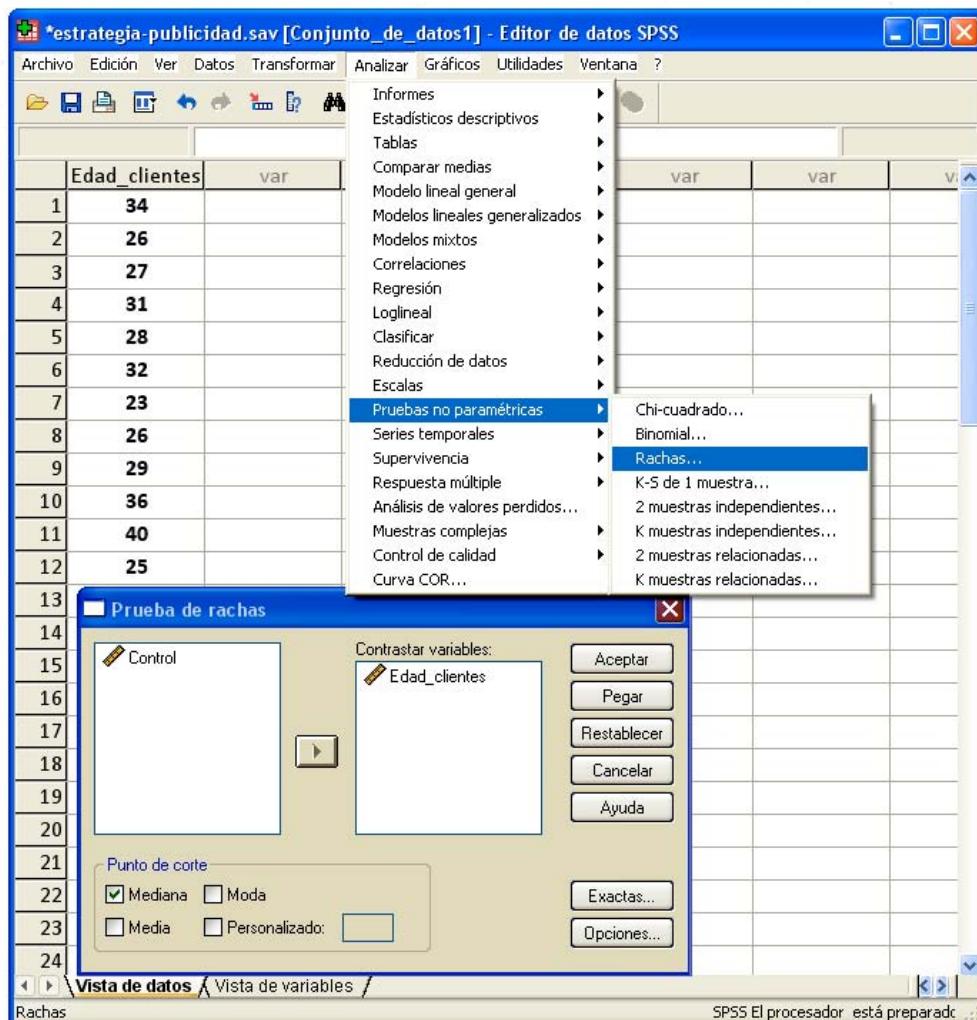
$$P\left[z \geq \frac{k_2 - 15}{2,74}\right] = 0,025 \rightarrow \frac{k_2 - 15}{2,74} = 1,96 \rightarrow k_2 = 20,37$$

El número de rachas  $R = 16$  se encuentra en la región de aceptación:  $9,63 < R = 16 < 20,37$  por lo que se acepta la hipótesis nula de aleatoriedad de las edades con una significación del 5%.

 Cuando hay más de 10 rachas y el tamaño de la muestra  $n > 40$  se puede utilizar la

aproximación asintótica de Levene:  $R \xrightarrow{d} N\left[\frac{2n-1}{3}, \sqrt{\frac{16n-29}{90}}\right]$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



The screenshot shows the SPSS interface with the 'Analizar' menu open, specifically the 'Pruebas no paramétricas' submenu. A sub-menu for 'Rachas...' is highlighted. The main window displays a data view with 12 rows of data for 'Edad\_clientes'. A dialog box titled 'Prueba de rachas' is open, showing 'Edad\_clientes' selected under 'Contrastar variables'. In the 'Punto de corte' section, 'Mediana' is checked. The output window at the bottom shows the results of the 'Prueba de rachas' analysis.

### Prueba de rachas

	Edad_clientes
Valor de prueba <sup>a</sup>	29
Casos < Valor de prueba	15
Casos $\geq$ Valor de prueba	19
Casos en total	34
Número de rachas	16
Z	-,447
Sig. asintót. (bilateral)	,655

a. Mediana

Como el p\_valor (Sig. asintótica bilateral) = 0,655 > 0,05 =  $\alpha$  se admite la hipótesis nula de aleatoriedad de la muestra.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

b) El número de personas que compran el paquete de viajes con al menos 30 años de edad se puede analizar desde dos perspectivas diferentes: *contraste paramétrico* o *contraste no paramétrico*.

- ✓ En el *contraste paramétrico*, un supuesto común en donde aparecen una o más variables cuantitativas es que se éstas se distribuyen normalmente en la población de referencia. El cumplimiento de este supuesto puede ser comprobado mediante la *prueba de Kolmogorov-Smirnov* o la *prueba de Shapiro-Wilk*. No obstante, diversos estudios han puesto de manifiesto que la importancia de este supuesto es relativa a medida que el tamaño muestral es grande, en especial a partir de muestras mayores de 30 casos.
- ✓ El *contraste no paramétrico* es una prueba de significación que no presupone el cumplimiento de normalidad, si bien debe verificar dos supuestos: (a) Que la muestra sea representativa de la población objeto de estudio. (b) Que las observaciones sean independientes.

El *contraste no paramétrico* tiene la ventaja de ser menos exigente que el *contraste paramétrico* a nivel de supuestos, aunque presenta un aspecto negativo al ofrecer menor potencia estadística ( $1 - \beta$ ) que la prueba paramétrica, es decir, con la prueba no paramétrica es menor la probabilidad de cometer un Error Tipo I (Rechazar la hipótesis nula  $H_0$  cuando es Cierta).

Entre los contrastes no paramétricos: La *prueba de signos* y el *test de rangos-signos de Wilcoxon* permiten el contraste de hipótesis acerca de la localización de la variable en estudio respecto a la mediana, no respecto a la media como la prueba paramétrica t de Student.

El *test de rangos-signos de Wilcoxon* requiere que la variable a analizar sea cuantitativa y que la distribución de la misma sea simétrica, supuestos que no lo son para la *prueba de signos*, que tan sólo asume que la variable a analizar sea al menos ordinal.

Debido al carácter habitualmente asimétrico positivo de la variable X = "Edad de las personas que compran el paquete de viaje", así como a la simplicidad de los supuestos, se analiza en primer lugar la *prueba de signos*, conocida también como *prueba binomial*.

#### ■ *Contraste de signos (prueba binomial)*

Denotando a la mediana poblacional por  $M_e$ , se contrasta si  $M_e = m = 30$

Suponiendo que la variable aleatoria en estudio X es continua alrededor de  $M_e$  se establecen las hipótesis:  $H_0: M_e = 30$      $H_1: M_e \neq 30$  (contraste bilateral o de dos colas)

Denotando por:

$S_+$  = "Número de signos positivos en la muestra"

$S_-$  = "Número de signos negativos en la muestra"

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Los signos positivos y negativos se calculan haciendo las diferencias  $D_i = X_i - M_e$

El estadístico de prueba  $S = \min(S_+, S_-)$  bajo la hipótesis nula  $H_0$  sigue una distribución binomial

$$S \sim B(n, 1/2) \quad E[S] = n \cdot p = \frac{n}{2} \quad V[S] = n \cdot p \cdot q = \frac{n}{4}$$

Cuando  $n$  es suficientemente grande  $n > 10 \longrightarrow S \sim N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ cuando } z_p = \frac{|(S - 0,5) - \frac{n}{2}|}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \frac{|(S - 0,5) - 0,5 \cdot n|}{0,5 \cdot \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$$

Se calculan las diferencias  $D_i = X_i - 30$

+	-	-	+	-	+	-	-	-	+
+	-	+	-	-	-	+	+	-	-
-	+	-	+	+	+	-	-	0	+
+	-	-	-						

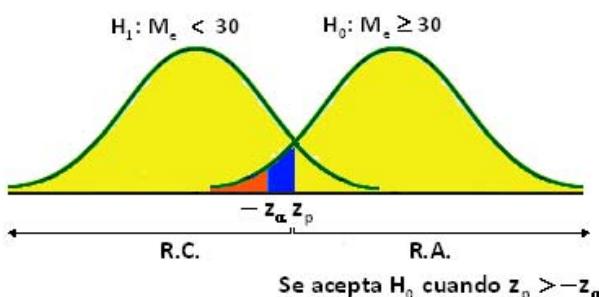
Como hay una observación igual a 0 se reduce el tamaño muestral a  $n = 34 - 1 = 33 > 10$  observaciones. Al ser  $n$  suficientemente grande se puede utilizar la aproximación normal.

$$S_+ = 14 > 10 \quad S_- = 19 > 10 \quad S = \min(14, 19) = 14$$

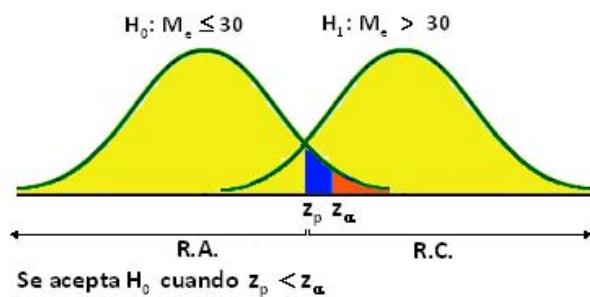
$$\text{Siendo } z_p = \frac{|(14 - 0,5) - 0,5 \cdot 33|}{0,5 \cdot \sqrt{33}} = 1,04 < 1,96 = z_{0,025}$$

Se acepta la hipótesis nula  $H_0: M_e = 30$ , afirmando que la mitad de las personas que compran este tipo de viajes tienen 30 años.

Contraste unilateral a la izquierda (cola a la izquierda)



Contraste unilateral a la derecha (cola a la derecha)

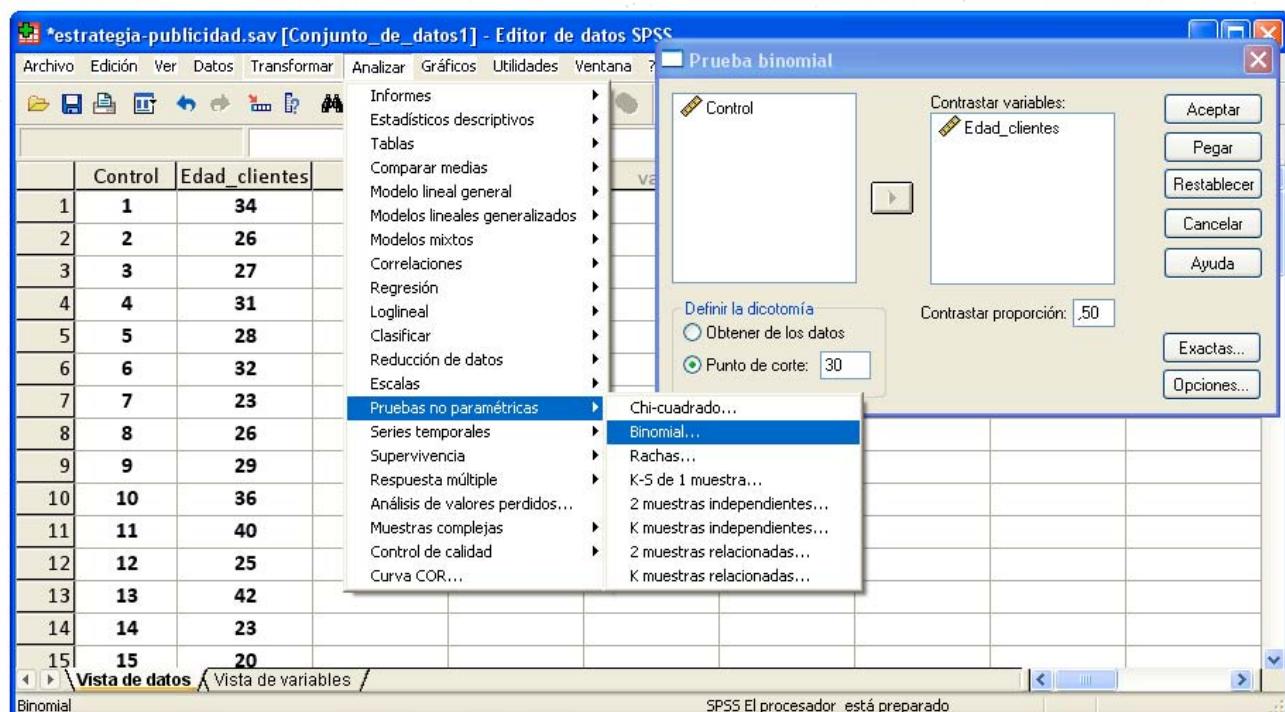


En el contraste unilateral a la izquierda (cola a la izquierda):  $H_0: M_e \geq 30$      $H_1: M_e < 30$

$$\text{Se acepta la hipótesis nula cuando } z_p = \frac{(S - 0,5) - 0,5 \cdot n}{0,5 \cdot \sqrt{n}} > -z_\alpha$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

En consecuencia, siendo  $z_p = \frac{(14 - 0,5) - 0,5 \cdot 33}{0,5 \cdot \sqrt{33}} = -1,04 > -1,645 = z_{0,05}$  se acepta la hipótesis nula, en consecuencia la mitad de las personas que compran este tipo de viajes tienen al menos 30 años.



Prueba binomial					
	Categoría	N	Proporción observada	Prop. de prueba	Sig. asintót. (bilateral)
Edad_clientes	Grupo 1	<= 30	,59	,50	,392 <sup>a</sup>
	Grupo 2	> 30	,41		
	Total	34	1,00		

a. Basado en la aproximación Z.

El  $p\_valor$  (Sig. asintótica bilateral) = 0,392 > 0,05 =  $\alpha$  con lo que se acepta la hipótesis nula

$H_0: M_e = 30$  (contraste bilateral o de dos colas)

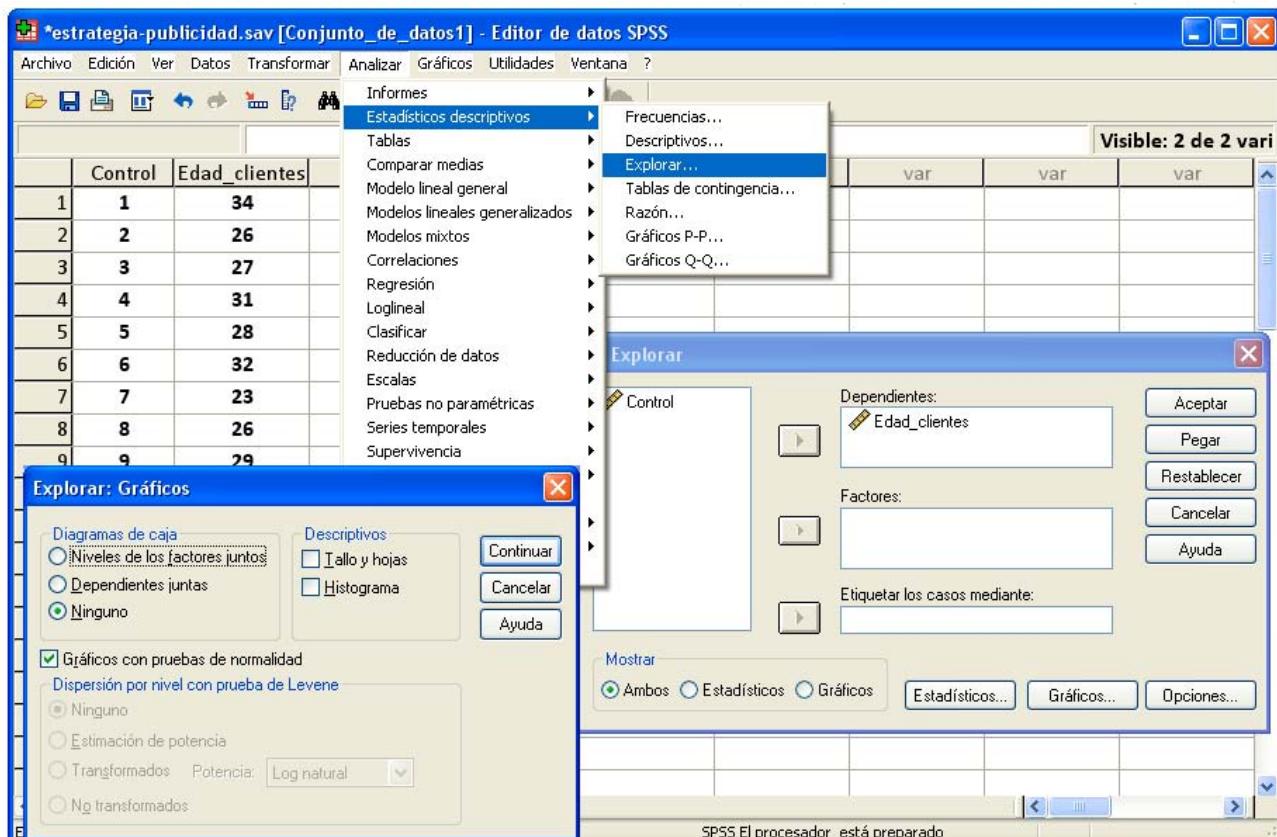
- Para realizar el contraste unilateral a la izquierda:  $H_0: M_e \geq 30 \quad H_1: M_e < 30$

$$p\_valor \text{ (Sig. asintótica unilateral izquierda)} = 1 - \frac{0,392}{2} = 0,804 > 0,05 = \alpha \rightarrow$$

concluyendo que las personas que compran este paquete de viajes tienen al menos 30 años.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Si se hubiera optado por un contraste paramétrico de la variable X = "Edad de las personas que compran el paquete de viaje" se tendría que haber realizado primero un contraste de normalidad de los datos obtenidos.



#### Descriptivos

		Estadístico	Error típ.
<b>Edad_clientes</b>	<b>Media</b>	<b>29,50</b>	<b>,866</b>
	<b>Intervalo de confianza para la media al 95%</b>	<b>27,74</b>	
		<b>31,26</b>	
	<b>Media recortada al 5%</b>	<b>29,31</b>	
	<b>Mediana</b>	<b>29,00</b>	
	<b>Varianza</b>	<b>25,470</b>	
	<b>Desv. típ.</b>	<b>5,047</b>	
	<b>Mínimo</b>	<b>20</b>	
	<b>Máximo</b>	<b>42</b>	
	<b>Rango</b>	<b>22</b>	
	<b>Amplitud intercuartil</b>	<b>7</b>	
	<b>Asimetría</b>	<b>,493</b>	<b>,403</b>
	<b>Curtosis</b>	<b>,086</b>	<b>,788</b>

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Pruebas de normalidad

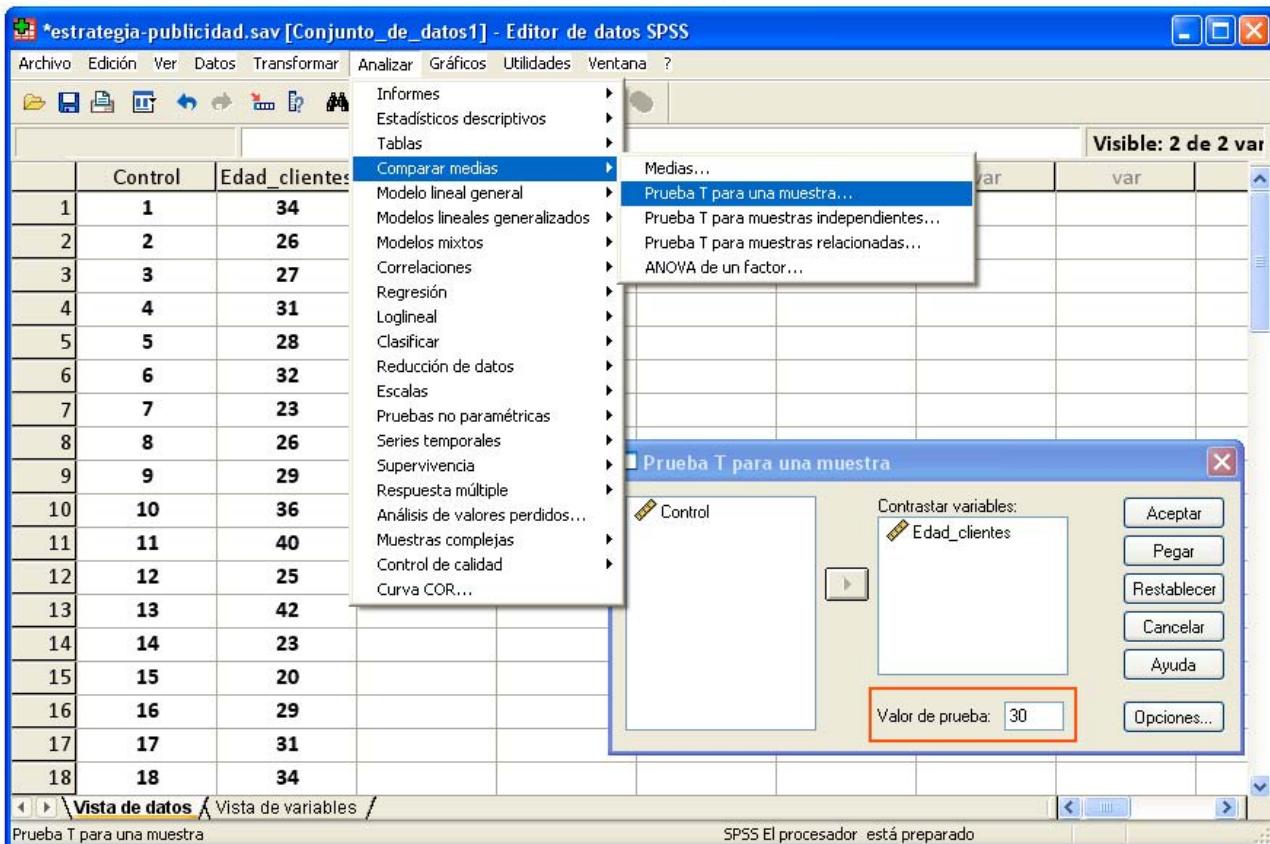
	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Edad_clientes	,098	34	,200*	,976	34	,638

\*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

a. Corrección de la significación de Lilliefors

En ambos contrastes (Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk) el p\_valor (Signatura) es mayor que  $\alpha = 0,05$  en consecuencia se admite la hipótesis de normalidad.

Realizando ahora el contraste parámetrico:  $H_0: \mu \geq 30$      $H_1: \mu < 30$



The screenshot shows the SPSS interface with the 'Analizar' (Analyze) menu open. The 'Prueba T para una muestra...' (T-Test) option is highlighted. A sub-dialog box titled 'Prueba T para una muestra' is displayed, containing fields for 'Control' and 'Edad\_clientes' under 'Contrastar variables:', and a 'Valor de prueba:' field set to 30.

### Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 30					
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
Edad_clientes	-,578	33	,567	-,500	-2,26	1,26

El p\_valor (Sig. bilateral) = 0,567 > 0,05 =  $\alpha$  con lo que se admite la hipótesis nula del contraste bilateral  $H_0: \mu = 30$ , es decir, las personas que compran el paquete de viajes tienen 30 años.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

El contraste que se desea realizar  $H_0: \mu \geq 30$      $H_1: \mu < 30$  es un contraste unilateral a la izquierda (cola a la izquierda):

$$p\text{-valor (Sig. unilateral izquierda)} = 1 - \frac{0,567}{2} = 0,7165 > 0,05 = \alpha \rightarrow \text{Se acepta la hipótesis nula}$$

concluyendo que las personas que compran el paquete de viajes tienen al menos 30 años

### Contraste de rangos-signos de Wilcoxon

Para aplicar el contraste es necesario suponer que la variable aleatoria X es continua y simétrica respecto a su mediana.

Se establece el contraste bilateral:  $H_0: M_e = 30$      $H_1: M_e \neq 30$

Estadístico de prueba:  $T_+ = \text{Suma de los rangos positivos de } D_i = X_i - M_e = \sum R_i^+$

Cuando el tamaño muestral  $n > 15$  se puede utilizar la aproximación normal, y en lugar de

$$T_+ = \sum R_i^+, \text{ utilizar como estadístico de contraste } z_p = \frac{|T_+ - E[T_+]|}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H_0} N(0,1)$$

$$\text{Se admite } H_0 \text{ si } z_p = \frac{|T_+ - E[T_+]|}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} \leq z_{\alpha/2}$$

El cálculo del valor experimental del estadístico, se obtiene:

$$E[T_+] = \frac{n \cdot (n+1)}{4} \quad \text{Var}[T_+] = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24}$$

A continuación, para facilitar los cálculos necesarios para hallar el estadístico de contraste, se elabora la tabla siguiente:

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

1	2	3	4	5	6	7	8
Orden $x_i$	$D_i = x_i - 30$	$x_i$	$ D_i $	Posición $ D_i $	Rango R	$R_i^-$	$R_i^+$
20	-10	20	10	31	31,5	31,5	
23	-7	23	7	27	28,5	28,5	
23	-7	23	7	28	28,5	28,5	
23	-7	23	7	29	28,5	28,5	
24	-6	24	6	24	25	25	
24	-6	24	6	25	25	25	
25	-5	25	5	21	22	22	
25	-5	25	5	22	22	22	
26	-4	26	4	16	18	18	
26	-4	26	4	17	18	18	
27	-3	27	3	14	14,5	14,5	
27	-3	27	3	15	14,5	14,5	
28	-2	28	2	9	11	11	
28	-2	28	2	10	11	11	
28	-2	28	2	11	11	11	
29	-1	29	1	1	4,5	4,5	
29	-1	29	1	2	4,5	4,5	
29	-1	29	1	3	4,5	4,5	
29	-1	29	1	4	4,5	4,5	
30	0	31	1	5	4,5		4,5
31	1	31	1	6	4,5		4,5
31	1	31	1	7	4,5		4,5
31	1	31	1	8	4,5		4,5
31	1	32	2	12	11		11
32	2	32	2	13	11		11
32	2	34	4	18	18		18
34	4	34	4	19	18		18
34	4	34	4	20	18		18
34	4	35	5	23	22		22
35	5	36	6	26	25		25
36	6	37	7	30	28,5		28,5
37	7	40	10	32	31,5		31,5
40	10	42	12	33	33		33
42	12					327	234

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

- En la primera columna se ordenan los datos muestrales de menor a mayor
- La segunda columna son las diferencias entre los datos muestrales ordenados y la mediana
-  Se reinicia el proceso
- La tercera columna son los datos muestrales ordenados, sin tener en cuenta los datos con diferencias nulas  $|D_i| = 0$
- En la cuarta columna las diferencias absolutas  $|D_i| = |x_i - 30| \neq 0$
- En la quinta columna la posición de  $|D_i|$  en orden ascendente, empezando por la más pequeña.
- En la sexta columna los rangos de las diferencias  $|D_i|$ , cuando hay diferencias repetidas se asigna el rango medio de ellas.

Excel: JERARQUIA.MEDIA(Dato, Columna valor absoluto datos, Columna datos ordenados)

La diferencia  $|D_i| = 10$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{31 + 32}{2} = 31,5$

La diferencia  $|D_i| = 1$  está repetida 8 veces, el rango se obtiene:  $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8}{8} = 4,5$

La diferencia  $|D_i| = 3$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{14 + 15}{2} = 14,5$

La diferencia  $|D_i| = 4$  está repetida 5 veces, el rango se obtiene:  $\frac{16 + 17 + 18 + 19 + 20}{5} = 18$

- En la séptima y octava columna aparecen, respectivamente, los rangos negativos y positivos.

$$T_- = \sum R_i^- = 327 \quad T_+ = \sum R_i^+ = 234$$

Como  $n = 33 > 15$ , utilizando la aproximación normal, el estadístico de contraste:

$$E[T_+] = \frac{n \cdot (n+1)}{4} = \frac{33 \cdot 34}{4} = 280,5 \quad \text{Var}[T_+] = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24} = \frac{33 \cdot 34 \cdot 67}{24} = 3132,25$$

$$z_p = \frac{|T_+ - E[T_+]|}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} = \frac{|234 - 280,5|}{\sqrt{3132,25}} = 0,831$$

Siendo  $z_p = 0,831 < 1,96 = z_{0,025}$  se admite la hipótesis nula  $H_0: M_e = 30$ , coincidiendo con el diagnóstico del test de signos de la mediana.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

estrategia-publicidad.sav [Conjunto\_de\_datos1] - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

**37 : Mediana**

	Orden	Edad_clientes	Mediana
1	1	34	
2	2	26	
3	3	27	
4	4	31	
5	5	28	
6	6	32	
7	7	23	
8	8	26	
9	9	29	
10	10	36	
11	11	40	
12	12	25	
13	13	42	30
14	14	23	30
15	15	20	30
16	16	29	30
17	17	31	30
18	18	34	30
19	19	28	30
20	20	24	30
21	21	23	30
22	22	35	30
23	23	29	30
24	24	34	30

Vista de datos Vista de variables /

2 muestras relacionadas SPSS El procesador está preparado

Visible: 3 de 3 va

Analizar → Pruebas no paramétricas → 2 muestras relacionadas...

**Pruebas para dos muestras relacionadas**

Contrastar pares: Edad\_clientes -- Mediana

Aceptar, Pegar, Restablecer, Cancelar, Ayuda

Exactas..., Opciones...

Selecciones actuales:

- Orden
- Edad\_clientes
- Mediana

Tipo de prueba:

- Wilcoxon
- Signos
- McNemar
- Homogeneidad marginal

### Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

#### Rangos

	N	Rango promedio	Suma de rangos
Mediana - Edad_clientes			
Rangos negativos	14 <sup>a</sup>	16,71	234,00
Rangos positivos	19 <sup>b</sup>	17,21	327,00
Empates	1 <sup>c</sup>		
Total	34		

- a. Mediana < Edad\_clientes
- b. Mediana > Edad\_clientes
- c. Mediana = Edad\_clientes

#### Estadísticos de contraste<sup>b</sup>

	Mediana - Edad_clientes
Z	-,833 <sup>a</sup>
Sig. asintót. (bilateral)	,405

- a. Basado en los rangos negativos.
- b. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

Se admite la hipótesis nula  $M_e = 30$  al presentar un  $p_{valor}$  (Sig. asintótica bilateral) = 0,405 > 0,05 =  $\alpha$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

5. Un cuestionario sobre innovación empresarial, entre otros aspectos, recoge datos sobre la edad ( $x_i$ ) y los años de experiencia profesional ( $y_i$ ), obteniendo la siguiente tabla:

$x_i$	35	37	42	31	33	47	52	50	60	39	43	34	34	41	49	40	34	57	53	32	45
$y_i$	5	7	10	6	8	12	17	16	23	7	13	4	9	11	12	14	9	21	28	7	10

- a) Contrastar que la edad de innovadores es una muestra aleatoria simple de una población continua y simétrica, con mediana igual o mayor que 40 para un nivel de significación del 5%.
- b) Contrastar que la experiencia profesional es una muestra aleatoria simple de una población continua y simétrica, con mediana 16 para un nivel de significación del 5%.

#### Solución:

- a) Como los datos proceden de una población continua y simétrica se puede emplear la prueba de signos de Wilcoxon, estableciendo el contraste unilateral a la izquierda:

$$H_0: M_e \geq 40 \quad H_1: M_e < 40$$

A simple vista se observa que la decimosexta observación es igual a la mediana, la diferencia es cero, con lo que el tamaño muestral se reduce una unidad, pasando a ser  $n = 20$

El tamaño muestral  $n > 15$  pudiendo utilizar la aproximación normal.

$$\text{Se admite } H_0 \text{ si } z_p = \frac{T_+ - E[T_+]}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} \geq -z_\alpha$$

Para determinar el estadístico de contraste se recurre a la tabla siguiente:

- En la primera columna se ordenan los datos muestrales de menor a mayor
- La segunda columna son las diferencias entre los datos muestrales ordenados y la mediana
- En la tercera columna las diferencias absolutas  $|D_i| = |x_i - 40|$
- En la cuarta columna la posición de  $|D_i|$  en orden ascendente, empezando por la más pequeña.
- En la quinta columna los rangos de las diferencias  $|D_i|$ , cuando hay diferencias repetidas se asigna el rango medio de ellas.

Excel: JERARQUIA.MEDIA(Dato, Columna valor absoluto datos, Columna datos ordenados)

La diferencia  $|D_i| = 1$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{1+2}{2} = 1,5$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

La diferencia  $|D_i| = 3$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{4+5}{2} = 4,5$

La diferencia  $|D_i| = 5$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{6+7}{2} = 6,5$

La diferencia  $|D_i| = 6$  está repetida 3 veces, el rango se obtiene:  $\frac{8+9+10}{3} = 9$

La diferencia  $|D_i| = 7$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{11+12}{2} = 11,5$

La diferencia  $|D_i| = 9$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{14+15}{2} = 14,5$

1	2	3	4	5	6	7
Orden $x_i$	$D_i = x_i - 40$	$ D_i $	Posición $ D_i $	Rango R	$R_i^-$	$R_i^+$
31	-9	9	14	14,5	14,5	
32	-8	8	13	13	13	
33	-7	7	11	11,5	11,5	
34	-6	6	8	9	9	
34	-6	6	9	9	9	
34	-6	6	10	9	9	
35	-5	5	6	6,5	6,5	
37	-3	3	4	4,5	4,5	
39	-1	1	1	1,5	1,5	
41	1	1	2	1,5		1,5
42	2	2	3	3		3
43	3	3	5	4,5		4,5
45	5	5	7	6,5		6,5
47	7	7	12	11,5		11,5
49	9	9	15	14,5		14,5
50	10	10	16	16		16
52	12	12	17	17		17
53	13	13	18	18		18
57	17	17	19	19		19
60	20	20	20	20		20
					78,5	131,5

En la sexta y séptima columna aparecen, respectivamente, los rangos negativos y positivos.

$$T_- = \sum R_i^- = 78,5 \quad T_+ = \sum R_i^+ = 131,5$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$$E[T_+] = \frac{n \cdot (n+1)}{4} = \frac{20 \cdot 21}{4} = 105 \quad \text{Var}[T_+] = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24} = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{24} = 717,5$$

$$z_p = \frac{T_+ - E[T_+]}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} = \frac{131,5 - 105}{\sqrt{717,5}} = 0,99$$

$z_p = 0,99 \geq -1,645 = -z_{0,05}$  → aceptando la hipótesis nula

The screenshot shows the SPSS Data Editor window with a dataset titled "innovacion-empresarial.sav". The dataset contains two variables: "Experiencia" and "Mediana\_experiencia". The "Analizar" menu is open, and the "Pruebas no paramétricas" option is selected, which has opened a sub-dialog box titled "Pruebas para dos muestras relacionadas". In this dialog, the "Contrastar pares:" field contains "Edad -- Mediana\_edad". The "Tipo de prueba" section includes checked options for "Wilcoxon" and "Exactas...". Other buttons in the dialog include "Aceptar", "Pegar", "Restablecer", "Cancelar", and "Ayuda". The status bar at the bottom right of the SPSS window says "SPSS El procesador está preparado".

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

**Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon**

**Rangos**

		N	Rango promedio	Suma de rangos
Mediana_edad - Edad	Rangos negativos	11 <sup>a</sup>	11,95	131,50
	Rangos positivos	9 <sup>b</sup>	8,72	78,50
	Empates	1 <sup>c</sup>		
	Total	21		

- a. Mediana\_edad < Edad
- b. Mediana\_edad > Edad
- c. Mediana\_edad = Edad

**Estadísticos de contraste<sup>b</sup>**

	Mediana_edad - Edad
Z	-,990 <sup>a</sup>
Sig. asintót. (bilateral)	,322

- a. Basado en los rangos positivos.
- b. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

SPSS siempre un contraste bilateral o de dos colas:  $H_0: M_e = 40$      $H_1: M_e \neq 40$  que se acepta al presentar un p\_valor (Sig. asintótica bilateral) = 0,322 > 0,05

En el caso del contraste unilateral a la izquierda:  $H_0: M_e \geq 40$      $H_1: M_e < 40$  corresponde una Sig.asintótica izquierda =  $1 - p\_valor / 2 = 1 - 0,161 = 0,839 > 0,05$ , con lo que se acepta la hipótesis nula.

b) Como los datos proceden de una población continua y simétrica se puede emplear la prueba de signos de Wilcoxon, estableciendo el contraste bilateral o de dos colas:

$$H_0: M_e = 16 \quad H_1: M_e \neq 16$$

La octava posición es igual a la mediana propuesta, la diferencia es cero, con lo que se elimina del estudio, y el tamaño muestral es  $n = 20 > 15$ , utilizando la aproximación asintótica bilateral a la distribución  $N(0, 1)$

$$\text{Se admite } H_0 \text{ si } z_p = \frac{|T_+ - E[T_+]|}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} \leq z_{\alpha/2}$$

Para determinar el estadístico de contraste se recurre a la tabla siguiente:

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

1	2	3	4	5	6	7
Orden $y_i$	$D_i = y_i - 16$	$ D_i $	Posición $ D_i $	Rango R	$R_i^-$	$R_i^+$
4	-12	12	19	19,5	19,5	
5	-11	11	18	18	18	
6	-10	10	17	17	17	
7	-9	9	14	15	15	
7	-9	9	15	15	15	
7	-9	9	16	15	15	
8	-8	8	13	13	13	
9	-7	7	10	11	11	
9	-7	7	11	11	11	
10	-6	6	8	8,5	8,5	
10	-6	6	9	8,5	8,5	
11	-5	5	6	6,5	6,5	
12	-4	4	4	4,5	4,5	
12	-4	4	5	4,5	4,5	
13	-3	3	3	3	3	
14	-2	2	2	2	2	
17	1	1	1	1		1
21	5	5	7	6,5		6,5
23	7	7	12	11		11
28	12	12	20	19,5		19,5
				172	38	

- En la primera columna se ordenan los datos muestrales de menor a mayor
- La segunda columna son las diferencias entre los datos muestrales ordenados y la mediana
- En la tercera columna las diferencias absolutas  $|D_i| = |y_i - 16|$
- En la cuarta columna la posición de  $|D_i|$  en orden ascendente, empezando por la más pequeña.

En la quinta columna los rangos de las diferencias  $|D_i|$ , cuando hay diferencias repetidas se asigna el rango medio de ellas.

Excel: JERARQUIA.MEDIA(Dato, Columna valor absoluto datos, Columna datos ordenados)

La diferencia  $|D_i| = 4$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{4+5}{2} = 4,5$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

La diferencia  $|D_i| = 5$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{6+7}{2} = 6,5$

La diferencia  $|D_i| = 6$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{8+9}{2} = 8,5$

La diferencia  $|D_i| = 7$  está repetida 3 veces, el rango se obtiene:  $\frac{10+11+12}{3} = 11$

La diferencia  $|D_i| = 9$  está repetida 3 veces, el rango se obtiene:  $\frac{14+15+16}{3} = 15$

La diferencia  $|D_i| = 12$  está repetida 2 veces, el rango se obtiene:  $\frac{19+20}{2} = 19,5$

En la sexta y septima columna aparecen, respectivamente, los rangos negativos y positivos.

$$T_- = \sum R_i^- = 172 \quad T_+ = \sum R_i^+ = 38$$

$$E[T_+] = \frac{n \cdot (n+1)}{4} = \frac{20 \cdot 21}{4} = 105 \quad \text{Var}[T_+] = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24} = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{24} = 717,5$$

$$z_p = \frac{|T_+ - E[T_+]|}{\sqrt{\text{Var}[T_+]}} = \frac{|38 - 105|}{\sqrt{717,5}} = 2,504$$

$z_p = 2,504 \not\leq 1,645 = z_{0,05}$  → Se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significación del 1%.



Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

**Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon**
**Rangos**

		N	Rango promedio	Suma de rangos
Mediana_experiencia	Rangos negativos	4 <sup>a</sup>	9,50	38,00
- Experiencia	Rangos positivos	16 <sup>b</sup>	10,75	172,00
	Empates	1 <sup>c</sup>		
	Total	21		

- a. Mediana\_experiencia < Experiencia
- b. Mediana\_experiencia > Experiencia
- c. Mediana\_experiencia = Experiencia

**Estadísticos de contraste<sup>b</sup>**

	Mediana_experiencia - Experiencia
Z	-2,504 <sup>a</sup>
Sig. asintót. (bilateral)	,012

- a. Basado en los rangos negativos.
- b. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

El p\_valor (Sig. asintótica bilateral) = 0,012 < 0,05 por lo que se rechaza la hipótesis nula, es decir, la mediana no es igual a 16 años de experiencia profesional, para la muestra considerada a un nivel de significación del 5%.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

6. En tres estaciones del metro de Madrid se analiza la puntualidad del servicio. Para ello, se toma una muestra en cada una de ellas, midiendo el tiempo que se retrasa cada tren que llega. Se han obtenido los resultados siguientes:

A	30	25	29	32	33	20	19	5	18	23		
B	26	21	22	37	38	13	10	9	3	14	16	34
C	31	35	42	15	17	11	12	24				

Contrastar si los retrasos en las tres estaciones son semejantes, con un nivel de significación del 5%. Utilizar la prueba de Kruskal-Wallis.

#### Solución:

La prueba de Kruskal-Wallis permite contrastar si varias muestras independientes, de iguales o diferentes tamaños, proceden de la misma población continua.

Sean  $F_1, F_2$  y  $F_3$  las correspondientes funciones de distribución. Se trata de comprobar si estas funciones presentan diferencias significativas en cuanto a su retraso.

Aplicando el test de Kruskal-Wallis se contrasta:

$$H_0: F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) \quad H_1: \text{Al menos dos son diferentes}$$

siendo  $F_i$  la función de distribución de la variable  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$

Estadístico de contraste:  $H = \frac{12}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (n+1)$

Siendo,  $n = \sum_{i=1}^k n_i$      $R_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}$      $r_{ij} \equiv$  Rango de la observación  $j$ -ésima de la muestra  $i$

Se rechaza  $H_0$  cuando  $P(H \geq h_\alpha | H_0) = \alpha$

$h_\alpha \equiv$  valor crítico que se observa en las tabla de valores críticos de Kruskal-Wallis.

Cuando todos los tamaños muestrales son mayores que 5 se recurre a la aproximación asintótica, que emplea la distribución  $\chi^2_{\alpha, k-1}$  con  $k \equiv$  número de muestras

Para calcular el valor experimental  $H$  se ordenan las observaciones  $x_i$  de menor a mayor, asignando a cada una su rango  $R_i$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

estación	$x_i$	$R_i$
2	3	1
1	5	2
2	9	3
2	10	4
3	11	5
3	12	6
2	13	7
2	14	8
3	15	9
2	16	10
3	17	11
1	18	12
1	19	13
1	20	14
2	21	15
2	22	16
1	23	17
3	24	18
1	25	19
2	26	20
1	29	21
1	30	22
3	31	23
1	32	24
1	33	25
2	34	26
3	35	27
2	37	28
2	38	29
3	42	30

Se agrupan los rangos de cada estación y se hace la suma de cada una de las muestras:

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

estación	$R_i^A$	estación	$R_i^B$	estación	$R_i^C$
1	2	2	1	3	5
1	12	2	3	3	6
1	13	2	4	3	9
1	14	2	7	3	11
1	17	2	8	3	18
1	19	2	10	3	23
1	21	2	15	3	27
1	22	2	16	3	30
1	24	2	20		
1	25	2	26		
		2	28		
		2	29		
	169		167		129

$$R_i^A = 169$$

$$R_i^B = 167$$

$$R_i^C = 129$$

Estadístico contraste:

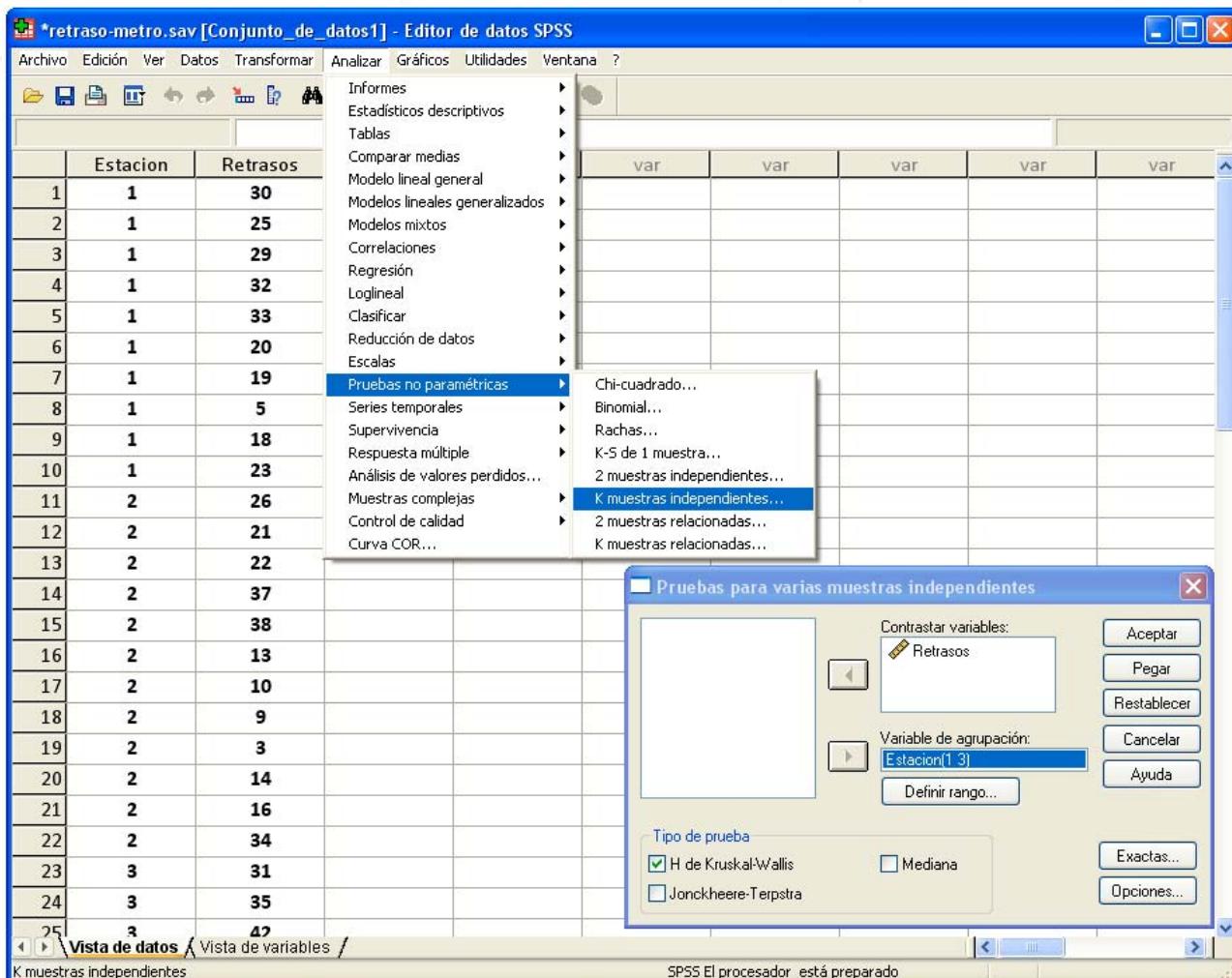
$$H = \frac{12}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^3 \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (n+1) = \frac{12}{30 \cdot 31} \left( \frac{169^2}{10} + \frac{167^2}{12} + \frac{129^2}{8} \right) - 3 \cdot 31 = 0,6814$$

Como se rechaza  $H_0$  cuando  $P(H \geq h_{\alpha} | H_0) = \alpha$

recurriendo a la aproximación asintótica a la  $\chi_{k-1, \alpha}^2 = \chi_{2, 0,05}^2 = 5,991$

$H = 0,6814 < h_{0,05} = 5,991 \rightarrow$  aceptando la hipótesis nula, afirmando que los retrasos en las tres estaciones son semejantes o siguen una misma distribución, con un nivel de significación del 5%.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



### Prueba de Kruskal-Wallis

Rangos

	<b>Estacio</b>	<b>N</b>	<b>Rango promedio</b>
<b>Retrasos</b>	1	10	16,90
	2	12	13,92
	3	8	16,13
	Total	30	

### Estadísticos de contraste<sup>a,b</sup>

	<b>Retrasos</b>
<b>Chi-cuadrado</b>	,681
<b>gl</b>	2
<b>Sig. asintót.</b>	,711

a. Prueba de Kruskal-Wallis

b. Variable de agrupación: Estacion

El  $p_{\text{valor}}$  (Sig. asintótica) = 0,711 > 0,05 =  $\alpha$  → aceptando la hipótesis nula, es decir, los retrasos en las tres estaciones son semejantes o siguen una misma distribución, con un nivel de significación del 5%.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

7. Un fabricante de juguetes desea conocer si existen diferencias en cuanto a la calidad de cuatro marcas de pilas extendidas en el mercado, con el fin de recomendarlas para su utilización en un nuevo juguete que se va a promocionar. Para comparar las cuatro marcas, toma muestras aleatorias de pilas de cada una de las marcas y controla el tiempo que permanecen funcionando el juguete en cuestión. Los resultados obtenidos fueron:

A	87	95	100	79	85	98	100	84	
B	97	62	59	37	90	42	44	100	94
C	100	45	50	95	70	78	80	47	69
D	75	50	54	65					

Utilizando un nivel de significación del 5%, ¿puede decirse que existen diferencias significativas en las calidades de estas marcas de pilas alcalinas?.

Utilizar la prueba de Kruskal-Wallis.

Solución:

Sean  $F_1, F_2, F_3$  y  $F_4$  las correspondientes funciones de distribución. Se trata de comprobar si estas funciones presentan diferencias significativas en cuanto a la duración de las pilas.

Aplicando el test de Kruskal-Wallis se contrasta:

$$H_0: F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) = F_4(x) \quad H_1: \text{Al menos dos son diferentes}$$

siendo  $F_i$  la función de distribución de la variable  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

El estadístico de contraste corregido por observaciones repetidas:

$$H^* = \frac{1}{f_c} \cdot H = \frac{1}{\sum_j (\tau_j^3 - \tau_j)} \cdot \frac{12}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (n+1)$$

$$f_c = 1 - \frac{\sum_j}{n^2 \cdot (n-1)}$$

Siendo,  $n = \sum_{i=1}^k n_i$   $R_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}$   $r_{ij} \equiv$  Rango de la observación  $j$ -ésima de la muestra  $i$

$\tau_j \equiv$  Número de observaciones que se repiten de cada grupo de repeticiones.

Se rechaza  $H_0$  cuando  $P(H^* \geq h_\alpha | H_0) = \alpha$

Para calcular el valor experimental se ordenan las observaciones de menor a mayor, asignándoles su correspondiente rango y sumando los rangos de la observaciones de cada muestra. En caso de empates, se procede de forma habitual:

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Muestra pilas	x <sub>i</sub>	Muestra pilas	x <sub>i</sub>	R <sub>i</sub>
1	87	2	37	1
1	95	2	42	2
1	100	2	44	3
1	79	3	45	4
1	85	3	47	5
1	98	4	50	6,5
1	100	3	50	6,5
1	84	4	54	8
2	97	2	59	9
2	62	2	62	10
2	59	4	65	11
2	37	3	69	12
2	90	3	70	13
2	42	4	75	14
2	44	3	78	15
2	100	1	79	16
2	94	3	80	17
3	100	1	84	18
3	45	1	85	19
3	50	1	87	20
3	95	2	90	21
3	70	2	94	22
3	78	3	95	23,5
3	80	1	95	23,5
3	47	2	97	25
3	69	1	98	26
4	75	1	100	28,5
4	50	2	100	28,5
4	54	3	100	28,5
4	65	1	100	28,5

Se observa que hay observaciones repetidas, como en el caso del valor 100 que aparece en las posiciones 27, 28, 29 y 30, siendo el rango medio:

$$\bar{R} = \frac{27 + 28 + 29 + 30}{4} = 28,5$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Muestra A	$R_i^A$	Muestra B	$R_i^B$	Muestra C	$R_i^C$	Muestra D	$R_i^D$
1	16	2	1	3	4	4	6,5
1	18	2	2	3	5	4	8
1	19	2	3	3	6,5	4	11
1	20	2	9	3	12	4	14
1	23,5	2	10	3	13		
1	26	2	21	3	15		
1	28,5	2	22	3	17		
1	28,5	2	25	3	23,5		
		2	28,5	3	28,5		
	179,5		121,5		124,5		39,5

$$R_i^A = 179,5 \quad R_i^B = 121,5 \quad R_i^C = 124,5 \quad R_i^D = 39,5$$

Estadístico de contraste inicial:

$$H = \frac{12}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^4 \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (n+1) = \frac{12}{30 \cdot 31} \left( \frac{179,5^2}{8} + \frac{121,5^2}{9} + \frac{124,5^2}{9} + \frac{39,5^2}{4} \right) - 3 \cdot 31 = 7,3883$$

Empleando el factor de corrección para observaciones repetidas:

$$f_c = 1 - \frac{\sum_j (\tau_j^3 - \tau_j)}{n^2 \cdot (n-1)}$$

$\tau_j$  ≡ Número de observaciones que se repiten de cada grupo de repeticiones: 2 (por el valor de 50), 2 (por el valor de 95) y 4 (por el valor de 100)

$$f_c = 1 - \frac{\sum_j (\tau_j^3 - \tau_j)}{n^2 \cdot (n-1)} = 1 - \frac{(2^3 - 2) + (2^3 - 2) + (4^3 - 4)}{30^2 \cdot 29} = 0,9972$$

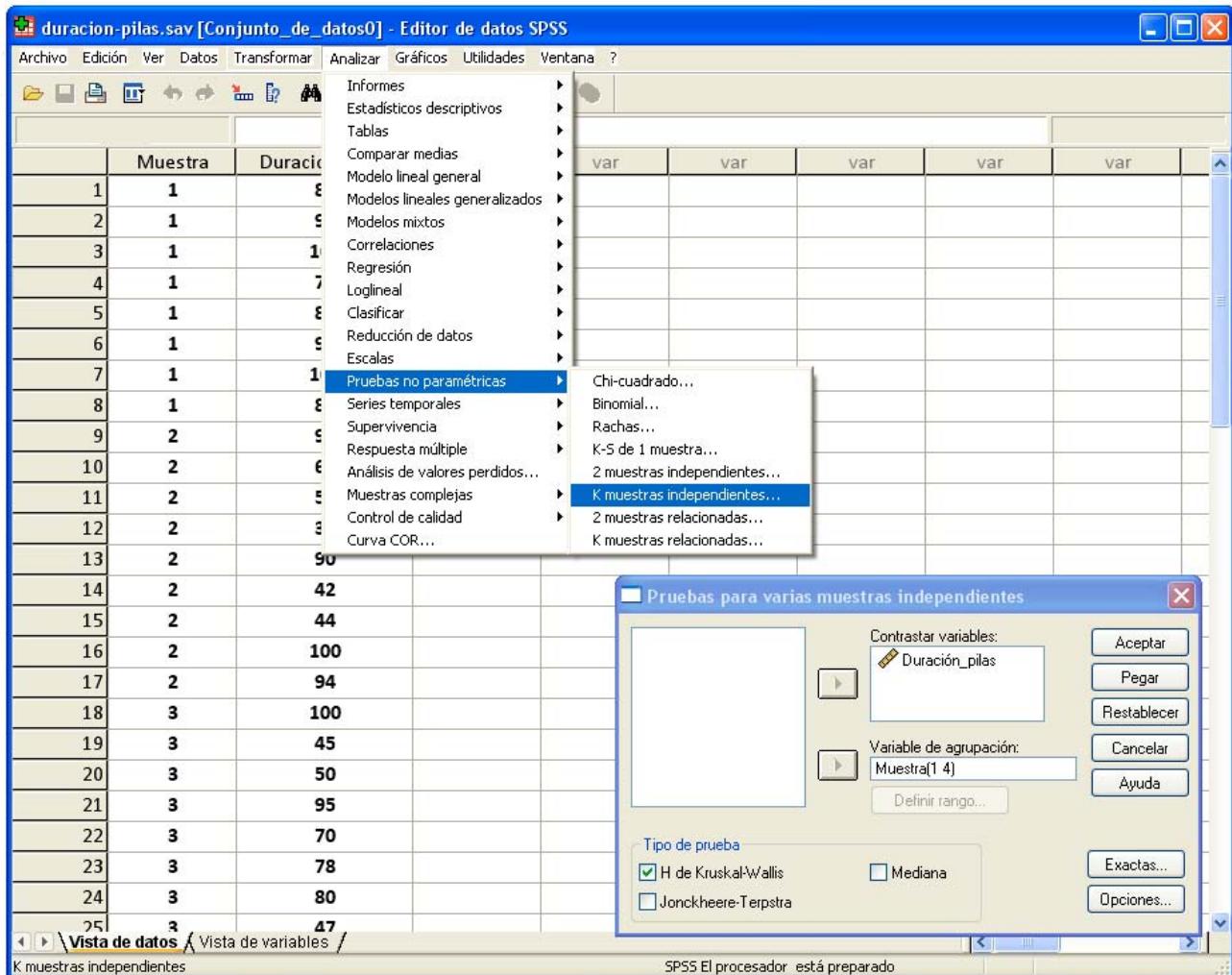
$$\text{El estadístico de contraste final: } H^* = \frac{1}{f_c} \cdot H = \frac{7,3883}{0,9972} = 7,408$$

Se rechaza  $H_0$  cuando  $P(H^* \geq h_{\alpha} | H_0) = \alpha$

recurriendo a la aproximación asintótica a la  $\chi^2_{k-1, \alpha} = \chi^2_{3, 0,05} = 7,815$

$H^* = 7,408 < h_{0,05} = 7,815 \rightarrow$  Se acepta la hipótesis nula, por tanto no existen diferencias significativas en la duración de las pilas alcalinas, con un nivel de significación del 5%.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



### Prueba de Kruskal-Wallis

#### Rangos

	Muestra	N	Rango promedio
<b>Duración_pilas</b>	Muestra A	8	22,44
	Muestra B	9	13,50
	Muestra C	9	13,83
	Muestra D	4	9,88
	Total	30	

#### Estadísticos de contraste<sup>a,b</sup>

	Duración_pilas
Chi-cuadrado	7,408
gl	3
Sig. asintót.	,060

a. Prueba de Kruskal-Wallis

b. Variable de agrupación: Muestra

Siendo el p\_valor (Sig. asintótica) = 0,06 > 0,05 =  $\alpha$  → Se acepta la hipótesis nula, concluyendo que no existen diferencias significativas en la duración de las pilas alcalinas, es decir, la duración de las pilas pueden tener una misma distribución, con un nivel de significación del 5%

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

8. En la siguiente tabla se adjuntan los datos sobre el ROE (ratio utilizado para realizar análisis mediante la medición de la rentabilidad obtenida por la entidad sobre sus recursos propio) y ROA (beneficio obtenido antes de intereses e impuestos - activos totales) de diez entidades financieras que cotizan en Bolsa.

Entidades	ROE	ROA
1 Endesa	13,68	1,80
2 Repsol	14,64	1,73
3 BBVA	20,28	1,66
4 Banesto	17,52	1,25
5 Carrefour	20,34	2,21
6 Ibercaja	15,12	2,28
7 Aceralia	18,6	1,75
8 Unicaja	18,72	2,83
9 BBK	19,32	2,62
10 Bankia	13,8	1,32

Contrastar que ambos conceptos no están relacionados empleando la  $\tau$  de Kendall, con un nivel de significación del 5%.

#### Solución:

Se establece el contraste bilateral:  $H_0: \tau_{xy} = 0$     $H_1: \tau_{xy} \neq 0$

$$\text{Estadístico de contraste: } \tau = \frac{|2 \cdot S|}{n \cdot (n-1)}$$

con  $n \equiv$  tamaño de la muestra y  $S \equiv$  Suma total de la función indicador:  $S = \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n \psi_{ij}$

Se hallan los indicadores:  $\psi_{ij}(R_{y_i}^*, R_{y_j}^*) = \begin{cases} 1 & \text{Si no hay inversión de rangos} \\ -1 & \text{Si hay inversión de rangos} \end{cases}$

utilizando la doble tabla de  $R_{y_i}^*$

Se rechaza  $H_0$  si  $P[\tau \geq k | H_0 \text{ es Cierta}]$

El estadístico de contraste  $\tau$  se construye mediante una tabla que contenga los rangos  $R_{x_i}$  y  $R_{y_i}$ , considerando los valores ordenados de mayor a menor.

Posteriormente se reordenan siguiendo el orden natural de  $R_{x_i}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

 $R_{x_i} \equiv \text{Jerarquia}(x_1; \$x\$1:\$x\$10)$ 
 $R_{y_i} \equiv \text{Jerarquia}(y_1; \$y\$1:\$y\$10)$ 

Entidades	$x_i$	$y_i$	$R_{x_i}$	$R_{y_i}$
Endesa	13,68	1,80	10	5
Repsol	14,64	1,73	8	7
BBVA	20,28	1,66	2	8
Banesto	17,52	1,25	6	10
Carrefour	20,34	2,21	1	4
Ibercaja	15,12	2,28	7	3
Aceralia	18,6	1,75	5	6
Unicaja	18,72	2,83	4	1
BBK	19,32	2,62	3	2
Bankia	13,8	1,32	9	9

Entidades	$R_{x_i}^*$	$R_{y_i}^*$
Carrefour	1	4
BBVA	2	8
BBK	3	2
Unicaja	4	1
Aceralia	5	6
Banesto	6	10
Ibercaja	7	3
Repsol	8	7
Bankia	9	9
Endesa	10	5

Se hallan los indicadores:  $\psi_{ij}(R_{y_i}^*, R_{y_j}^*) = \begin{cases} 1 & \text{Si no hay inversión de rangos} \\ -1 & \text{Si hay inversión de rangos} \end{cases}$

utilizando la doble tabla de  $R_{y_i}^*$

	$R_{y_2}^*$	$R_{y_3}^*$	$R_{y_4}^*$	$R_{y_5}^*$	$R_{y_6}^*$	$R_{y_7}^*$	$R_{y_8}^*$	$R_{y_9}^*$	$R_{y_{10}}^*$
$R_{y_1}^*$	8	2	1	6	10	3	7	9	5
$R_{y_2}^*$	4	1	-1	-1	1	1	-1	1	1
$R_{y_3}^*$	8		-1	-1	1	-1	-1	1	-1
$R_{y_4}^*$	2			-1	1	1	1	1	1
$R_{y_5}^*$	1				1	1	1	1	1
$R_{y_6}^*$	6					1	-1	1	-1
$R_{y_7}^*$	10						-1	-1	-1
$R_{y_8}^*$	3							1	1
$R_{y_9}^*$	7							1	-1
$R_{y_{10}}^*$	9								-1
	1	-2	-3	2	5	-2	3	6	-1

$$S = \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^9 \psi_{ij} = 1 - 2 - 3 + 2 + 5 - 2 + 3 + 6 - 1 = 9$$

$$\tau = \frac{|2 \cdot S|}{n \cdot (n-1)} = \frac{2 \cdot 9}{10 \cdot 9} = 0,200$$

Teniendo en cuenta la aproximación asintótica

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$$\tau \approx N\left(0, \sqrt{\frac{2 \cdot (2n+5)}{9n \cdot (n-1)}}\right) = N\left(0, \sqrt{\frac{2.25}{9 \cdot 10 \cdot 9}}\right) = N(0, 0.248)$$

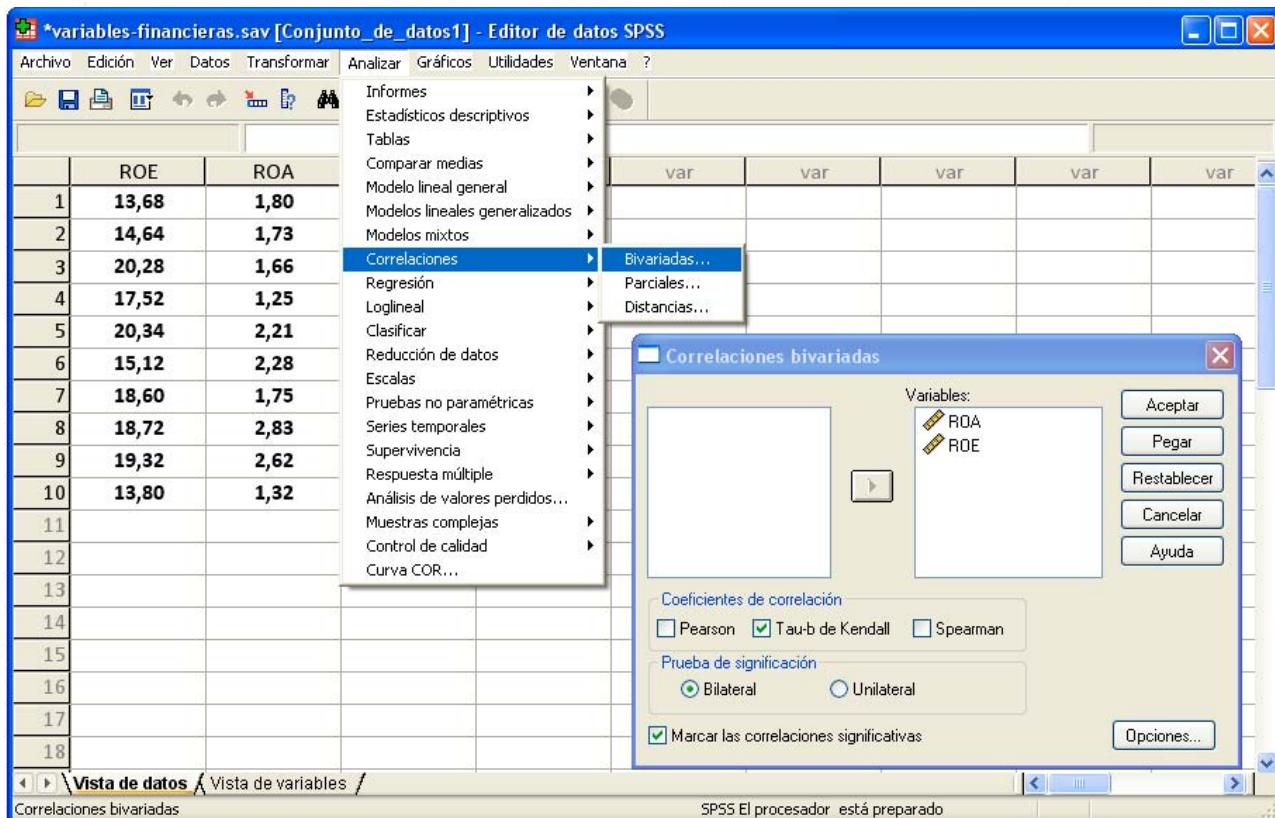
$$\text{Se rechaza } H_0 \text{ si } P[\tau \geq k | H_0 \text{ es Cierta}] = P[\tau \geq k | N(0, 0.248)] = P[z \geq \frac{k}{0.248}]$$

$$\frac{k}{0.248} = 1.96 = z_{0.025} \Rightarrow k = 0.486$$

Como se verifica que  $\tau = 0.200 < 0.486 = z_{0.025}$  → Se acepta la hipótesis nula de que las variables se encuentran incorreladas, es decir, las variables ROE y ROA no se encuentran asociadas.

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR



The screenshot shows the SPSS Data Editor window with two columns of data: ROE and ROA. The ROE column values are: 13,68, 14,64, 20,28, 17,52, 20,34, 15,12, 18,60, 18,72, 19,32, 13,80. The ROA column values are: 1,80, 1,73, 1,66, 1,25, 2,21, 2,28, 1,75, 2,83, 2,62, 1,32. The SPSS menu bar is visible, showing 'Analizar' (Analyze) selected. A context menu is open over the data, with 'Correlaciones' (Correlations) selected, and 'Bivariadas...' (Bivariate) is highlighted. A 'Correlaciones bivariadas' dialog box is open, showing 'Variables: ROA, ROE'. Under 'Coeficientes de correlación', 'Tau-b de Kendall' is checked. Under 'Prueba de significación', 'Bilateral' is selected. The 'Aceptar' (Accept) button is highlighted.

Correlaciones			ROA	ROE
Tau_b de Kendall	ROA	Coefficiente de correlación	1,000	,200
		Sig. (bilateral)	.	,421
		N	10	10
ROE		Coefficiente de correlación	,200	1,000
		Sig. (bilateral)	,421	.
		N	10	10

El p\_valor (Signatura bilateral) = 0,421 > 0,05 =  $\alpha$  → Se acepta la hipótesis nula de incorrelación de las variables ROA Y ROE. En consecuencia, no se encuentran asociadas.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

9. La tabla adjunta presenta las cotizaciones máximas de las acciones de una compañía durante los últimos diez días del mes de octubre:

14,47 12,63 15,12 17,75 18,05 17,1 13,42 20,4 19,3 17,4

a) Con un nivel de significación del 10%, ¿se puede decir que la muestra es aleatoria con respecto a la media de cotizaciones alcanzada en mes anterior que fue de 17,5 euros?

B) Contrastar si las acciones se pueden considerar normalmente distribuidas, con un nivel de significación del 5%. Utilizar el contraste de Lilliefors y Shapiro-Wilk

**Solución:**

a) Se utiliza el contraste de rachas de Wald-Wolfowitz

Se establece el contraste:  $H_0$ : La muestra es aleatoria  $H_1$ : La muestra no es aleatoria

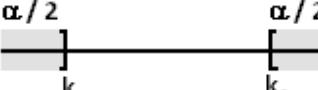
Estadístico contraste:  $R = \text{Número de rachas}$

Para obtener una sucesión dicotómica se compara cada observación con 17,5, sustituyendo el valor por el signo S cuando el valor observado supere a esta cantidad o por el signo I cuando la observación sea inferior a 17,5. En caso de haber alguna observación igual a esta cantidad se ignora y el tamaño de la muestra se reduce convenientemente.

14,47	12,63	15,12	17,75	18,05	17,1	13,42	20,4	19,3	17,4
I	I	I	S	S	I	I	S	S	I

La sucesión dicotómica queda: III | SS | II | SS | I  $\rightarrow \hat{R} = 5$

$n_1 = \text{Número de signos S} = 4$      $n_2 = \text{Número de signos I} = 6$

Región crítica del contraste:  Siendo  $k_1$  y  $k_2$  el menor y el mayor entero, respectivamente, que verifican:

$$P(R \leq k_1) \leq \frac{\alpha}{2} = 0,05 \quad P(R \geq k_2) \leq \frac{\alpha}{2} = 0,05$$

Utilizando la tabla para el test de rachas de aleatoriedad:

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Distribución de probabilidades para el test de rachas de aleatoriedad

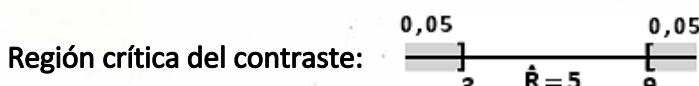
distribución del número total de rachas  $R$ ;  $P(R \leq r)$  en una muestra

$n = n_1 + n_2$ , para el test de rachas de aleatoriedad de Wald-Wolfowitz:

$n_1$	$n_2$	$r$										
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	0,2000	0,5000	0,9000	1,0000							
2	4	0,1333	0,4000	0,8000	1,0000							
2	5	0,0952	0,3333	0,7143	1,0000							
2	6	0,0714	0,2857	0,6429	1,0000							
2	7	0,0556	0,2500	0,5833	1,0000							
2	8	0,0444	0,2222	0,5333	1,0000							
2	9	0,0364	0,2000	0,4909	1,0000							
2	10	0,0303	0,1818	0,4545	1,0000							
3	3	0,1000	0,3000	0,7000	0,9000	1,0000						
3	4	0,0571	0,2000	0,5429	0,8000	0,9714	1,0000					
3	5	0,0357	0,1429	0,4286	0,7143	0,9286	1,0000					
3	6	0,0238	0,1071	0,3452	0,6429	0,8810	1,0000					
3	7	0,0167	0,0833	0,2833	0,5833	0,8333	1,0000					
3	8	0,0121	0,0667	0,2364	0,5333	0,7879	1,0000					
3	9	0,0091	0,0545	0,2000	0,4909	0,7454	1,0000					
3	10	0,0070	0,0454	0,1713	0,4545	0,7063	1,0000					
4	4	0,0286	0,1143	0,3714	0,6286	0,8857	0,9714	1,0000				
4	5	0,0159	0,0714	0,2619	0,5000	0,7857	0,9286	0,9921	1,0000			
4	6	0,0095	0,0476	0,1905	0,4048	0,6905	0,8810	0,9762	1,0000			
4	7	0,0061	0,0333	0,1424	0,3333	0,6061	0,8333	0,9545	1,0000			
4	8	0,0040	0,0242	0,1091	0,2788	0,5333	0,7879	0,9293	1,0000			
4	9	0,0028	0,0182	0,0853	0,2364	0,4713	0,7454	0,9021	1,0000			
4	10	0,0020	0,0140	0,0679	0,2028	0,4186	0,7063	0,8741	1,0000			

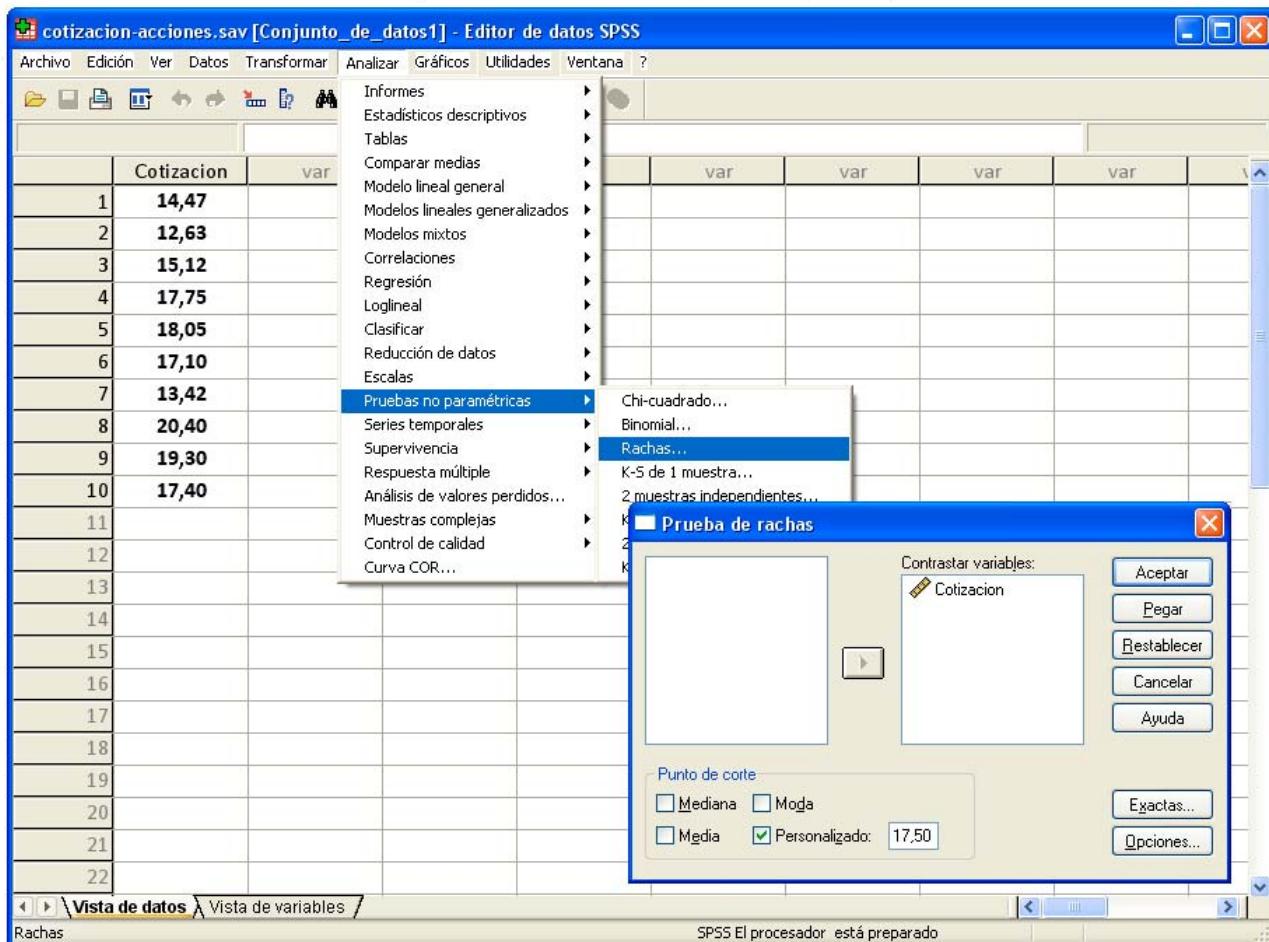
$$P(R \leq 3) = 0,0476 \leq 0,05 \quad P(R \leq 4) = 0,1905 > 0,05 \quad \rightarrow \quad k_1 = 3$$

$$\begin{cases} P(R \leq 7) = 0,8810 \rightarrow P(R \geq 8) = 1 - 0,8810 = 0,1190 > 0,05 \\ P(R \leq 8) = 0,9762 \rightarrow P(R \geq 9) = 1 - 0,9762 = 0,0238 \leq 0,05 \end{cases} \rightarrow k_2 = 9$$



Con una significación del 5% se acepta la aleatoriedad de la muestra de cotizaciones respecto a la media histórica alcanzada el mes anterior.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



The screenshot shows the SPSS Data Editor window with a dataset named 'cotizacion-acciones.sav'. The 'Analizar' (Analyze) menu is open, and the 'Pruebas no paramétricas' (Non-parametric tests) option is selected. Within this, 'Rachas...' (Runs Test) is highlighted. A sub-dialog box titled 'Prueba de rachas' (Runs Test) is displayed, showing 'Contrastar variables:' set to 'Cotizacion'. Under 'Punto de corte' (Point of comparison), 'Personalizado:' is checked with the value '17,50' entered. Other options like 'Mediana', 'Moda', and 'Media' are also listed.

#### Prueba de rachas

	Cotizacion
Valor de prueba <sup>a</sup>	17,500
Casos en total	10
Número de rachas	5
Z	-,211
Sig. asintót. (bilateral)	,833

a. Especificado por el usuario.

El p\_valor (Sig. sintót. Bilateral) = 0,833 > 0,10 =  $\alpha$   
 con lo que se acepta la hipótesis nula de aleatoriedad de la muestra.

#### b) Contraste de normalidad de Lilliefors

##### ▪ Contraste bilateral:

$H_0$ : La muestra procede de una distribución normal

$H_1$ : La muestra no procede de una distribución normal

Estadístico contraste:  $D_n = \max |F_n(z) - F_0(z)| = \max(a_i, b_i)$

Se acepta  $H_0$  si  $D_n = \max |F_n(z) - F_0(z)| = \max(a_i, b_i) < D_{\alpha, n}$  (valor crítico tabla de Lilliefors)

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Para determinar el estadístico de contraste se construye una tabla donde se ordenan los datos, tipificando cada valor, se calcula  $F_0(z_i)$ ,  $F_n(z_i)$  y se crean las columnas  $a_i = |F_0(z_i) - F_n(z_i)|$  y

$$b_i = |F_0(z_i) - F_n(z_{i-1})|$$

$$\text{Valores tipificados } z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} = \frac{x_i - 16,564}{2,5524}$$

$$a_1 = \bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{165,64}{10} = 16,564 \quad a_2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \frac{2802,2936}{10} = 280,22936$$

$$\sigma_x^2 = a_2 - a_1^2 = 280,22936 - 16,564^2 = 5,8633$$

$$s_x^2 = \frac{10 \cdot 5,8633}{9} = 6,5147 \quad s_x = \sqrt{6,5147} = 2,5524$$

$F_0(z_i)$  ≡ Función de distribución de una  $N(0, 1)$ : DISTR.NORM.ESTAND( $z_i$ )

$F_n(z_i)$  ≡ Función de distribución empírica de la muestra tipificada:  $F_n(z_i) = \frac{n^{\circ} \text{ observaciones}}{n} = \frac{N(z)}{n}$

$x_i$	$z_i$	$F_n(z_i)$	$F_0(z_i)$	$a_i =  F_0(z_i) - F_n(z_i) $	$b_i =  F_0(z_i) - F_n(z_{i-1}) $
12,63	-1,5413	0,100	0,0616	0,0384	0,0616
13,42	-1,2318	0,200	0,1090	0,0910	0,0090
14,47	-0,8204	0,300	0,2060	0,0940	0,0060
15,12	-0,5657	0,400	0,2858	0,1142	0,0142
17,1	0,2100	0,500	0,5832	0,0832	0,1832
17,4	0,3275	0,600	0,6284	0,0284	0,1284
17,75	0,4647	0,700	0,6789	0,0211	0,0789
18,05	0,5822	0,800	0,7198	0,0802	0,0198
19,3	1,0719	0,900	0,8581	0,0419	0,0581
20,4	1,5029	1,000	0,9336	0,0664	0,0336

$$D_n = \max(a_i, b_i) = 0,1832 < 0,239 = D_{0,10,10} \text{ (valor crítico tabla de Lilliefors)}$$

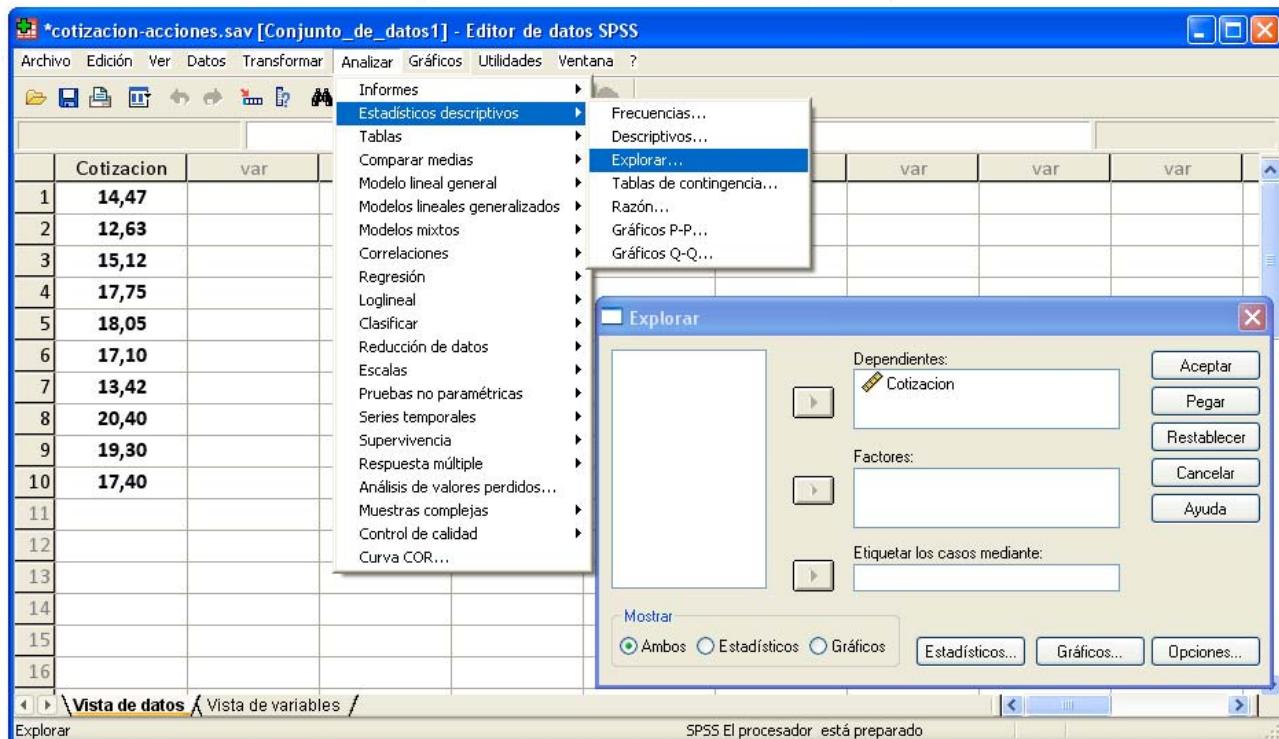
Por lo que se acepta la hipótesis nula de normalidad para la muestra, con un nivel de significación del 10%

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Corrección de Lilliefors para Normalidad

<i>n</i>	Nivel de significación $\alpha$				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
4	0.300	0.319	0.352	0.381	0.417
5	0.285	0.299	0.315	0.337	0.405
6	0.265	0.277	0.294	0.319	0.364
7	0.247	0.258	0.276	0.300	0.348
8	0.233	0.244	0.261	0.285	0.331
9	0.223	0.233	0.249	0.271	0.311
10	0.215	0.224	0.239	0.258	0.294
11	0.206	0.217	0.230	0.249	0.284
12	0.199	0.212	0.223	0.242	0.275
13	0.190	0.202	0.214	0.234	0.268
14	0.183	0.194	0.207	0.227	0.261
15	0.177	0.187	0.201	0.220	0.257
16	0.173	0.182	0.195	0.213	0.250
17	0.169	0.177	0.189	0.206	0.245
18	0.166	0.173	0.184	0.200	0.239
19	0.163	0.169	0.179	0.195	0.235
20	0.160	0.166	0.174	0.190	0.231
21	0.157	0.162	0.170	0.186	0.226
22	0.154	0.158	0.167	0.182	0.220
23	0.150	0.154	0.164	0.179	0.213
24	0.146	0.151	0.161	0.176	0.207
25	0.142	0.147	0.158	0.173	0.200
26	0.139	0.145	0.155	0.171	0.197
27	0.137	0.143	0.153	0.168	0.194
28	0.135	0.140	0.150	0.166	0.192
29	0.133	0.138	0.147	0.163	0.190
30	0.131	0.136	0.144	0.161	0.187
<i>n &gt; 30</i>	$0.736/\sqrt{n}$	$0.768/\sqrt{n}$	$0.805/\sqrt{n}$	$0.886/\sqrt{n}$	$1.031/\sqrt{n}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



#### Descriptivos

		Estadístico	Error típ.
<b>Cotizacion</b>	<b>Media</b>	<b>16,5640</b>	<b>,80714</b>
	<b>Intervalo de confianza para la media al 90%</b>	<b>15,0844</b>	
		<b>18,0436</b>	
	<b>Media recortada al 5%</b>	<b>16,5694</b>	
	<b>Mediana</b>	<b>17,2500</b>	
	<b>Varianza</b>	<b>6,5147</b>	
	<b>Desv. típ.</b>	<b>2,5524</b>	
	<b>Mínimo</b>	<b>12,63</b>	
	<b>Máximo</b>	<b>20,40</b>	
	<b>Rango</b>	<b>7,77</b>	
	<b>Amplitud intercuartil</b>	<b>4,16</b>	
	<b>Asimetría</b>	<b>-,180</b>	<b>,687</b>
	<b>Curtosis</b>	<b>-1,044</b>	<b>1,334</b>

#### Pruebas de normalidad

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
<b>Cotizacion</b>	<b>,1832</b>	<b>10</b>	<b>,200*</b>	<b>,9579</b>	<b>10</b>	<b>,762</b>

\*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

a. Corrección de la significación de Lilliefors

El p\_valor (Sig)= 0,2 > 0,1 =  $\alpha$  → Se acepta la hipótesis nula de normalidad de la muestra.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

**Contraste de normalidad de Shapiro-Wilk**

▪ Contraste bilateral:

Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ )

Se establecen las hipótesis:

$H_0$ : La muestra procede de una distribución normal

$H_1$ : La muestra no procede de una distribución normal

Estadístico contraste:  $W = \frac{\left( \sum_{i=1}^k a_i \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

$$k = \begin{cases} n/2 & n \text{ par} \\ (n-1)/2 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$x_i$  ≡ Estadístico ordenado de orden i

$a_i$  ≡ Coeficientes para cada  $(x_{n-i+1} - x_i)$ , con  $(n, i = 1, 2, \dots, k)$  valores de la tabla de Shapiro-Wilk

Se rechaza la hipótesis de normalidad  $H_0$  cuando  $W < W_{\alpha, n}$  (valor crítico de Shapiro-Wilk)

Para calcular el estadístico W se organizan las operaciones en la siguiente tabla:

$x_i$	$x_{n-i+1}$	$x_i$	$x_{n-i+1} - x_i$	$a_i$	$a_i \cdot (x_{n-i+1} - x_i)$
20,4	20,4	12,63	7,77	0,5739	4,4592
19,3	19,3	13,42	5,88	0,3291	1,9351
18,05	18,05	14,47	3,58	0,2141	0,7665
17,75	17,75	15,12	2,63	0,1224	0,3219
17,4	17,4	17,1	0,30	0,0399	0,0120
17,1					7,4947
15,12					
14,47					
13,42					
12,63					

$$\left( \sum_{i=1}^5 a_i \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right)^2 = 7,4947^2 = 56,1705$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Coeficientes  $a_i$  del test W de Shapiro-Wilks de normalidad

$i \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739
2		0,0000	0,1667	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291
3				0,0000	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141
4					0,0000	0,0561	0,0947	0,1224	
5						0,0000	0,0399		

Se había calculado  $s_x^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 6,5147 \rightarrow \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 58,6323$

Así pues:  $W = \frac{\left( \sum_{i=1}^5 a_i \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{56,1705}{58,6323} = 0,9579$

Siendo  $W = 0,9579 > 0,869 = W_{0,10,10}$  se acepta la hipótesis nula de normalidad, con un 10% de significación.

Valores críticos del test W de Shapiro-Wilks de normalidad

$$P[W < W_\alpha] = \alpha$$

$n$	Nivel de significación $\alpha$								
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,98	0,99
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959	0,998	0,999	1,000	1,000
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	0,987	0,992	0,996	0,997
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	0,979	0,986	0,991	0,993
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	0,974	0,981	0,986	0,989
7	0,730	0,760	0,803	0,838	0,928	0,972	0,979	0,985	0,988
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	0,972	0,978	0,984	0,987
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	0,972	0,978	0,984	0,986
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	0,972	0,978	0,983	0,986

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

10. En la tabla aparecen los resultados de una encuesta que se realizó a cien personas sobre las veces que viajaban en avión durante un año.

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14
$n_i$	2	5	10	14	16	12	11	8	5	6	8	2	1

Con una significación del 5%, determinar si la muestra se ajusta a una distribución de Weibull de parámetros  $b = 6$  y  $c = 2$ , empleando la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

### Solución:

La función de Weibull se emplea con frecuencia en análisis de supervivencia (función de supervivencia, vida permanente de construcciones, vida de electrodomésticos, etc.) La función de densidad y función de distribución, respectivamente, son:

$$f(x; b, c) = \frac{c \cdot x^{c-1}}{b} \cdot e^{-(x/b)^c} \quad x \geq 0, \quad b > 0, \quad c > 0 \quad c \equiv \text{parámetro de forma} \quad b \equiv \text{parámetro de escala}$$

$$F(x; b, c) = 1 - e^{-(x/b)^c}$$

Con el test de Kolmogorov-Smirnov se establece el contraste bilateral:

$H_0$ : La muestra procede de una distribución de Weibull

$H_1$ : La muestra no procede de una distribución de Weibull

Estadístico de contraste:  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)|$

Se acepta  $H_0$  si  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| < D_{\alpha/2, n}$  (valor crítico tabla Kolmogorov-Smirnov)

$F_0(x_i) \equiv$  Función de distribución:  $\text{DIST.WEIBULL}(x_i; 2; 6; 1)$

$F_n(x_i) \equiv$  Función de distribución empírica de la muestra:  $F_n(x_i) = \frac{\text{nº observaciones}}{n} = \frac{N(x_i)}{n}$

Se construye una tabla con  $F_0(x_i)$ ,  $F_n(x_i)$  y  $|F_n(x_i) - F_0(x_i)|$  para determinar el estadístico de contraste.

Las probabilidades acumuladas a cada valor  $x_i$ , es decir la función de distribución  $F_n(x_i)$  se determinan de la forma siguiente:

$$F_n(x_1) = P(X \leq 1) = 1 - e^{-(1/6)^2} = 0,0274$$

$$F_n(x_2) = P(X \leq 2) = 1 - e^{-(2/6)^2} = 0,1052$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$F_n(x_{13}) = P(X \leq 14) = 1 - e^{-(14/6)^2} = 0,0043$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$x_i$	$n_i$	$N_i$	$F_n(x_i)$	$F_0(x_i)$	$ F_0(x_i) - F_n(x_i) $
1	2	2	0,020	0,0274	0,0074
2	5	7	0,070	0,1052	0,0352
3	10	17	0,170	0,2212	0,0512
4	14	31	0,310	0,3588	0,0488
5	16	47	0,470	0,5006	0,0306
6	12	59	0,590	0,6321	0,0421
7	11	70	0,700	0,7436	0,0436
8	8	78	0,780	0,8310	0,0510
9	5	83	0,830	0,8946	0,0646
10	6	89	0,890	0,9378	0,0478
11	8	97	0,970	0,9653	0,0047
12	2	99	0,990	0,9817	0,0083
14	1	100	1,000	0,9957	0,0043

$$D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| = 0,0646$$

Siendo  $D_n = 0,0646 < 0,1358 = D_{0,05, 100}$  → Se acepta la hipótesis nula  $H_0$ , en consecuencia, la muestra se ajusta a una distribución de Weibull  $W(6, 2)$ , con una significación de 0,05

#### Valores críticos del test de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

Tamaño de muestra	Test bilateral, $\alpha = 0,20$	0,10	0,050	0,02	0,010
Aproximación para $n > 40$ :	$\frac{1,0730}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,2239}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,3581}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,5174}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,6276}{\sqrt{n}}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

viajes-avion.sav [Conjunto\_de\_datos0] - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

	Personas	Tiempo_Libre
1	1	2
2	2	5
3	3	10
4	4	14
5	5	16
6	6	12
7	7	11
8	8	8
9	9	5
10	10	6
11	11	8
12	12	2
13	14	1
14		
15		
16		
17		
18		

Informes

- Estadísticos descriptivos
- Tablas
- Comparar medias
- Modelo lineal general
- Modelos lineales generalizados
- Modelos mixtos
- Correlaciones
- Regresión
- Loglineal
- Clasificar
- Reducción
- Escalas
- Pruebas no paramétricas
- Series temporales
- Supervivencia
- Resuesta
- Análisis de componentes principales
- Muestras controladas
- Control de calidad
- Curva COR

Analizar

Gráficos

Utilidades

Ventana

?

Gráficos P-P

Variables: Personas

Distribución de contraste: Weibull

Parámetros de la distribución

Estimar los de los datos

Escala: 1

Forma: 1

Aceptar

Pegar

Restablecer

Cancelar

Ayuda

Transformar

Transformación log natural

Tipificar los valores

Diferenciar

Diferenciar ciclo:

Periodicidad actual: Ninguna

Fórmula de estimación de la proporción

de Blom  de Rankit  de Tukey

de Van der Waerden

Rango asignado a los empates

Media  Mayor  Menor

Romper los empates arbitrariamente

Vista de datos Vista de variables /

SPSS El procesador está preparado

#### Parámetros de distribución estimados

		Personas
Distribución de Weibull	Escala	7,021
	Forma	2,323

Los casos se ponderan por Tiempo\_Libre.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

11. Una compañía dedicada al envasado, fabricación y venta de productos lácteos pretende analizar el consumo anual de leche en una ciudad. Para realizar el estudio, decide llevar a cabo una encuesta a cien personas, clasificando por edades los litros de leche medios consumidos, obteniendo los siguientes datos:

$L_{i-1} - L_i$	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
$n_i$	26	21	16	15	12	10

Con un nivel de significación del 5%, empleando la prueba de Kolmogorov-Smirnov, determinar si la muestra se ajusta a una distribución uniforme  $U(0,60)$

### Solución:

Se establece el contraste bilateral:

$H_0$ : La muestra procede de una distribución de uniforme  $U(0,60)$

$H_1$ : La muestra no procede de una distribución de uniforme  $U(0,60)$

Estadístico de contraste:  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)|$

Se acepta  $H_0$  si  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| < D_{\alpha, n}$  (valor crítico tabla Kolmogorov-Smirnov)

$$F_0(x_i) \equiv \text{Función de distribución } U(0,60) \equiv \frac{x - 0}{60 - 0} = \frac{x}{60}$$

$$F_n(x_i) \equiv \text{Función de distribución empírica de la muestra: } F_n(x_i) = \frac{\text{nº observaciones}}{n} = \frac{N(x_i)}{n}$$

Se construye una tabla con  $F_0(x_i)$ ,  $F_n(x_i)$  y  $|F_n(x_i) - F_0(x_i)|$  para determinar el estadístico de contraste.

Las probabilidades acumuladas a cada valor  $x_i$ , es decir la función de distribución  $F_n(x_i)$  se determinan de la forma siguiente:

$$F_n(x_1) = P(X \leq 10) = 10 / 60 = 0,1667$$

$$F_n(x_2) = P(X \leq 20) = 20 / 60 = 0,3333$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$F_n(x_6) = P(X \leq 60) = 60 / 60 = 1$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

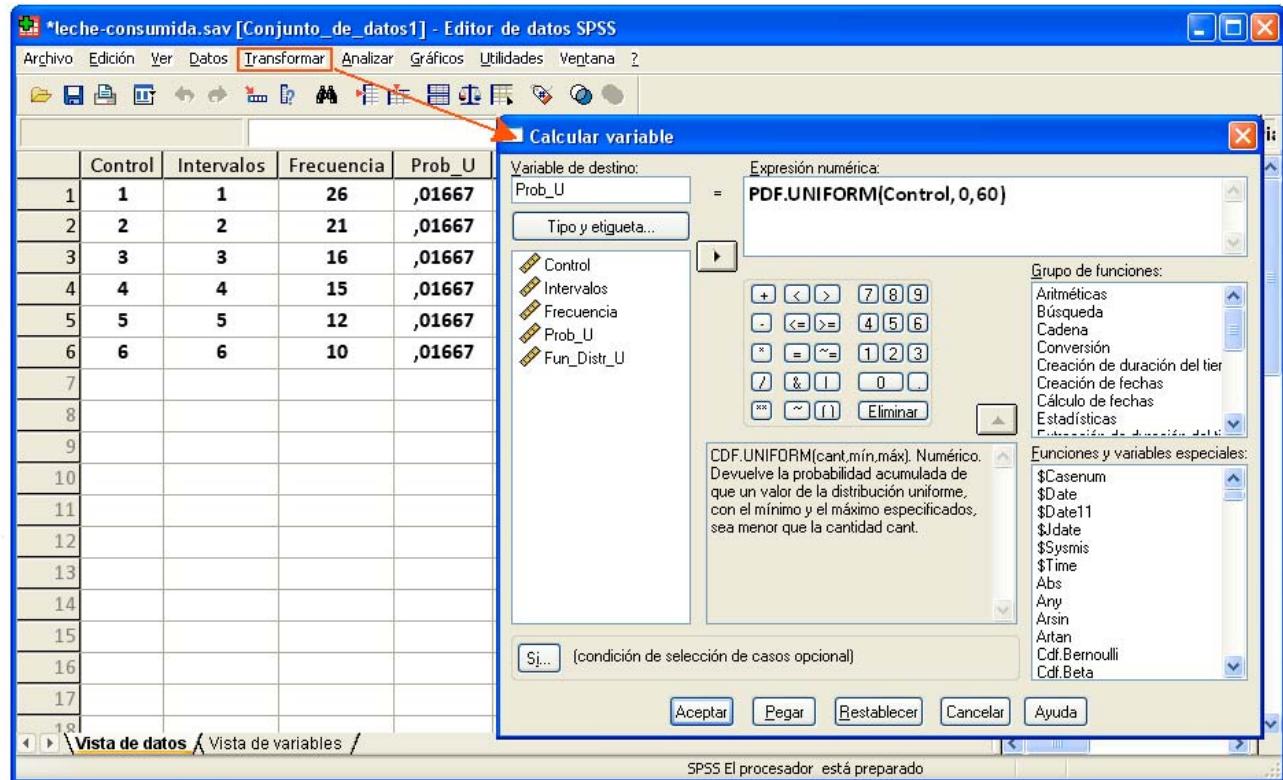
$L_{i-1} - L_i$	$n_i$	$N_i$	$F_n(x_i)$	$F_0(x_i)$	$ F_0(x_i) - F_n(x_i) $
0 – 10	26	26	0,260	0,1667	0,0933
10 – 20	21	47	0,470	0,3333	0,1367
20 – 30	16	63	0,630	0,5000	0,1300
30 – 40	15	78	0,780	0,6667	0,1133
40 – 50	12	90	0,900	0,8333	0,0667
50 – 60	10	100	1,000	1,0000	0,0000

$$D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| = 0,1367$$

Siendo  $D_n = 0,1367 > 0,1358 = D_{0,05, 100}$  → Se rechaza la hipótesis nula  $H_0$ , en consecuencia, la muestra no se ajusta a una distribución  $U(0,60)$ , con una significación de 0,05

Valores críticos del test de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

Test bilateral					
Tamaño muestra	$\alpha = 0,20$	0,10	0,050	0,02	0,010
Aproximación $n > 40$	$\frac{1,0730}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,2239}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,3581}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,5174}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,6276}{\sqrt{n}}$

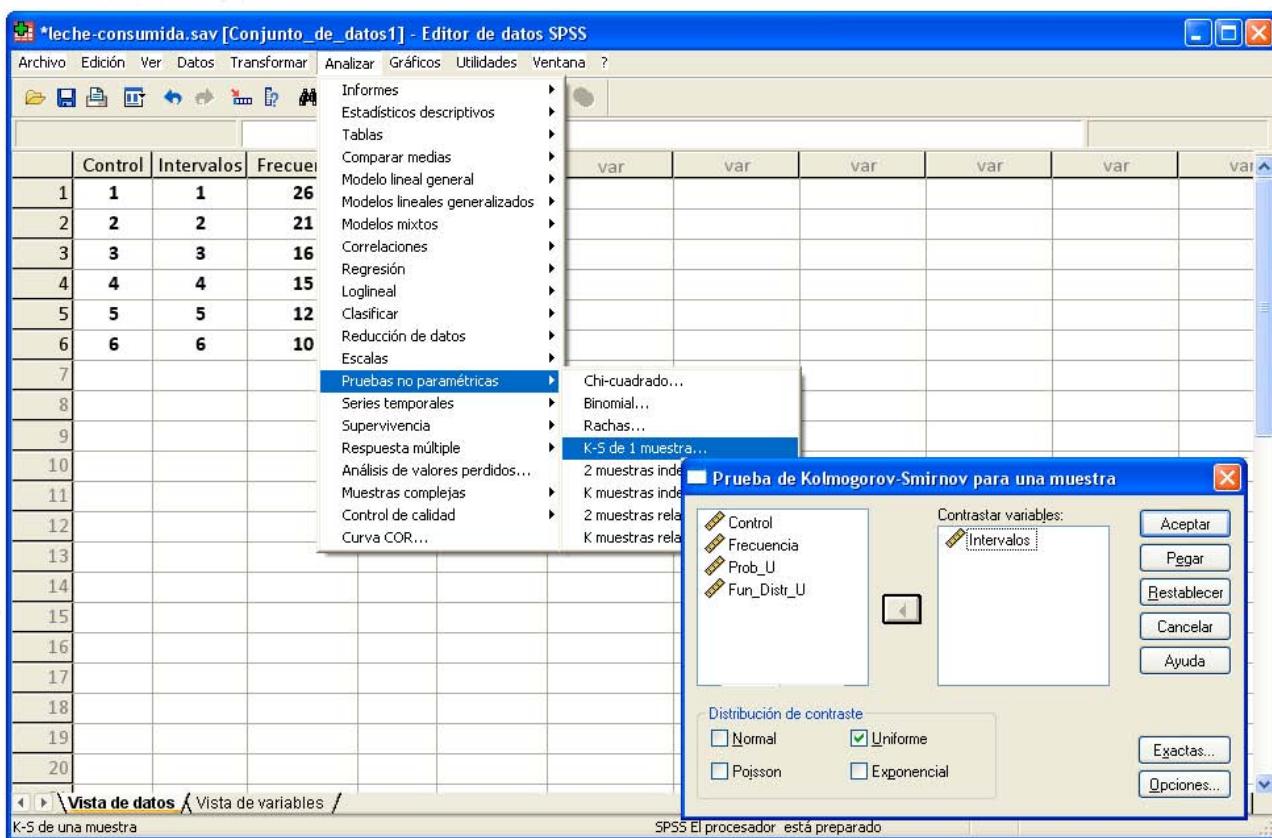
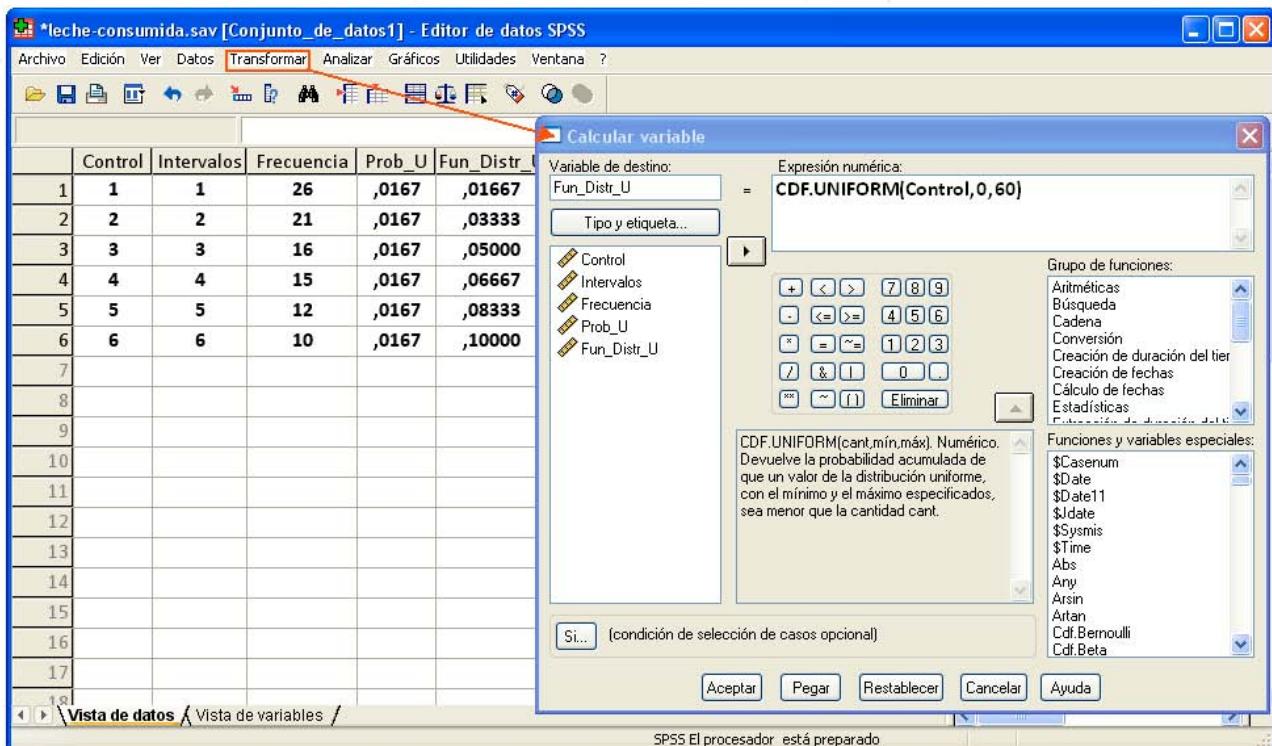


The screenshot shows the SPSS Data Editor window with the following details:

- Menu Bar:** Archivo, Edición, Ver, Datos, **Transformar** (highlighted), Analizar, Gráficos, Utilidades, Ventana, ?
- Data View:** A table with columns: Control, Intervalos, Frecuencia, and Prob\_U. The data rows are:
 

1	1	1	26
2	2	2	21
3	3	3	16
4	4	4	15
5	5	5	12
6	6	6	10
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
- Calcular variable Dialog:**
  - Variable de destino:** Prob\_U
  - Expresión numérica:** PDF.UNIFORM(Control, 0, 60)
  - Operadores y funciones:** Includes arithmetic operators (+, -, \*, /, etc.) and statistical functions like CDF.UNIFORM.
  - Grupos de funciones:** Aritméticas, Búsqueda, Cadena, Conversión, Creación de duración del ítem, Creación de fechas, Cálculo de fechas, Estadísticas.
  - Funciones y variables especiales:** \$Casenum, \$Date, \$Date11, \$Jdate, \$Sysmis, \$Time, Abs, Any, Arsin, Artan, Cdf.Bernoulli, Cdf.Beta.
- Status Bar:** SPSS El procesador está preparado

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

**Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra**

		Intervalos
N		100
Parámetros uniformes <sup>a,b</sup>	Mínimo	1
	Máximo	6
Diferencias más extremas	Absoluta	,270
	Positiva	,270
	Negativa	-,100
Z de Kolmogorov-Smirnov		2,700
Sig. asintót. (bilateral)		,000

a. La distribución de contraste es la Uniforme.

b. Se han calculado a partir de los datos.

El p\_valor (Sig. asintótica bilateral) = 0 < 0,05 =  $\alpha$  → Se rechaza la hipótesis nula  $H_0$ , concluyendo que la muestra no se ajusta a una distribución  $U(0,60)$ , con una significación de 0,05

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

12. En la tabla aparecen las puntuaciones obtenidas en un test de estrés que se ha pasado en dos ciudades.

A	18	13	22	9	12	21	14	17	15	10	16	19	11
B	12	16	11	15	9	8	13	6	9	13	7	22	

Con un nivel de significación del 1%, a partir de los datos, puede afirmarse que el estrés es mayor en la ciudad A que en la ciudad B. Utilizar el test de la U de Wilcoxon-Mann-Whitney , el contraste de Kolmogorov-Smirnov y la prueba de la Mediana.

### Solución:

Sean las variables aleatorias:

X ≡ Puntuaciones de estrés en el test de la ciudad A

Y ≡ Puntuaciones de estrés en el test de la ciudad B

Se realiza el contraste unilateral a la izquierda:  $H_0: F(z) \geq G(z)$      $H_1: F(z) < G(z)$

Siendo F y G las respectivas funciones de distribución de X e Y

#### ✓ Utilizando el test de la U de Wilcoxon-Mann-Whitney

$$\text{Estadístico de contraste: } U = U_{x_A} = n_A \cdot n_B + \frac{n_A \cdot (n_A + 1)}{2} - W_{x_1}$$

siendo  $W_{x_1} = \sum_{i=1}^n R_i$  suma de rangos de la muestra  $X_1$

Como  $n_A = 13 > 10$  y  $n_B = 12 > 10$  la distribución del estadístico de contraste U se puede aproximar por una normal

$$U = U_{x_1} \sim N\left(\frac{n_A \cdot n_B}{2}, \sqrt{\frac{n_A \cdot n_B \cdot (n_A + n_B + 1)}{12}}\right)$$

$$E(U) = \frac{n_A \cdot n_B}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78 \quad \sigma_U = \sqrt{\frac{n_A \cdot n_B \cdot (n_A + n_B + 1)}{12}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 12 \cdot (13 + 12 + 1)}{12}} = 18,3848$$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_p = \frac{U - \frac{n_A \cdot n_B}{2}}{\sqrt{\frac{n_A \cdot n_B \cdot (n_A + n_B + 1)}{12}}} \leq z_\alpha$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Para calcular el valor experimental de U se ordenan las observaciones muestrales de menor a mayor, asignando un rango de 1 hasta 25. Si hubiera observaciones repetidas, se asigna el rango medio de los que les corresponderían si fueran diferentes.

Para facilitar el cálculo  $W_{x_1} \equiv \sum_{i=1}^{25} c_i \cdot R_i$  se crea el coeficiente instrumental  $c_i = \begin{cases} 1 & \text{valor } X_1 \\ 0 & \text{valor } X_2 \end{cases}$

Excel: JERARQUIA(Observación 1 ; Observaciones 1 : 25 ; Poisición 1 : 25)

Poisición	Observaciones	Jerarquía	$R_i$	$c_i$	$c_i \cdot R_i$
1	6	1	1	0	0
2	7	2	2	0	0
3	8	3	3	0	0
4	9	4	5	0	0
5	9	4	5	0	0
6	9	4	5	1	5
7	10	7	7	1	7
8	11	8	8,5	0	0
9	11	8	8,5	1	8,5
10	12	10	10,5	0	0
11	12	10	10,5	1	10,5
12	13	12	13	0	0
13	13	12	13	0	0
14	13	12	13	1	13
15	14	15	15	1	15
16	15	16	16,5	0	0
17	15	16	16,5	1	16,5
18	16	18	18,5	0	0
19	16	18	18,5	1	18,5
20	17	20	20	1	20
21	18	21	21	1	21
22	19	22	22	1	22
23	21	23	23	1	23
24	22	24	24,5	0	0
25	22	24	24,5	1	24,5
					204,5

$$W_{x_1} \equiv \sum_{i=1}^{25} c_i \cdot R_i = 204,5$$

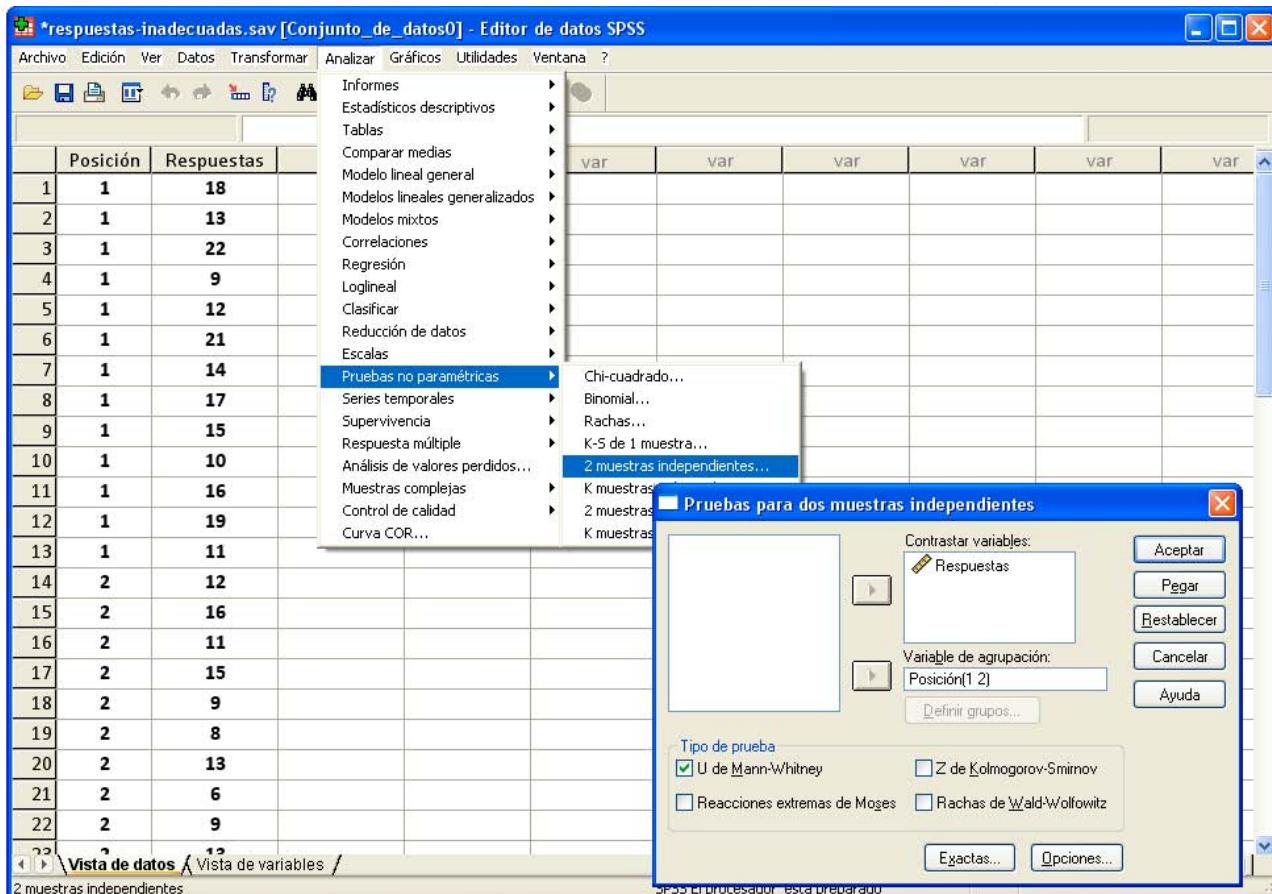
Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

En consecuencia,

$$U = U_{x_A} = n_A \cdot n_B + \frac{n_A \cdot (n_A + 1)}{2} - W_{x_1} = 13 \cdot 12 + \frac{13 \cdot 14}{2} - 204,5 = 42,5$$

$$\text{Estadístico contraste: } z_p = \frac{U - \frac{n_A \cdot n_B}{2}}{\sqrt{\frac{n_A \cdot n_B \cdot (n_A + n_B + 1)}{12}}} = \frac{42,5 - 78}{\sqrt{18,3848}} = -1,9309$$

Como  $z_p = -1,9309 > -2,33 = z_{0,01}$  se acepta la hipótesis nula con una significación de 0,051.



The screenshot shows the SPSS Data Editor window with a dataset containing two variables: 'Posición' and 'Respuestas'. The 'Analizar' menu is open, and the 'Pruebas no paramétricas' submenu is selected. The '2 muestras independientes...' option is highlighted. A dialog box titled 'Pruebas para dos muestras independientes' is displayed, showing 'Contrastar variables:' set to 'Respuestas' and 'Variable de agrupación:' set to 'Posición(1 2)'. Under 'Tipo de prueba', 'U de Mann-Whitney' is checked. At the bottom right of the dialog box are buttons for 'Aceptar', 'Pegar', 'Restablecer', 'Cancelar', and 'Ayuda'.

#### Estadísticos de contraste<sup>b</sup>

	Respuestas
U de Mann-Whitney	42,500
W de Wilcoxon	120,500
Z	-1,936
Sig. asintót. (bilateral)	,053
Sig. exacta [2*(Sig. unilateral)]	42,500 <sup>a</sup>

a. No corregidos para los empates.

b. Variable de agrupación: Posición

En el contraste unilateral a la izquierda, el  $p_{valor} = 1 - 0,053 / 2 = 0,9735 > 0,01 = \alpha$ , se acepta la hipótesis nula de que el estrés es mayor en la ciudad A.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Utilizando el contraste de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras

Se plantea el contraste unilateral a la izquierda:  $H_0: F(z) \geq G(z)$      $H_1: F(z) < G(z)$

Estadístico de contraste:  $D_{n_1, n_2}^- = \max [G_{n_2}(x) - F_{n_1}(x)]$

$$\text{con } F_{n_1}(x) = \frac{N_1(x)}{n_1} \quad F_{n_2}(x) = \frac{N_2(x)}{n_2}$$

Se rechaza  $H_0$  si  $D_{n_1, n_2}^- > D_{\alpha, n_1, n_2}$

Se crea una tabla haciendo los cálculos necesarios para obtener el valor experimental del estadístico de contraste  $D_{n_1, n_2}$

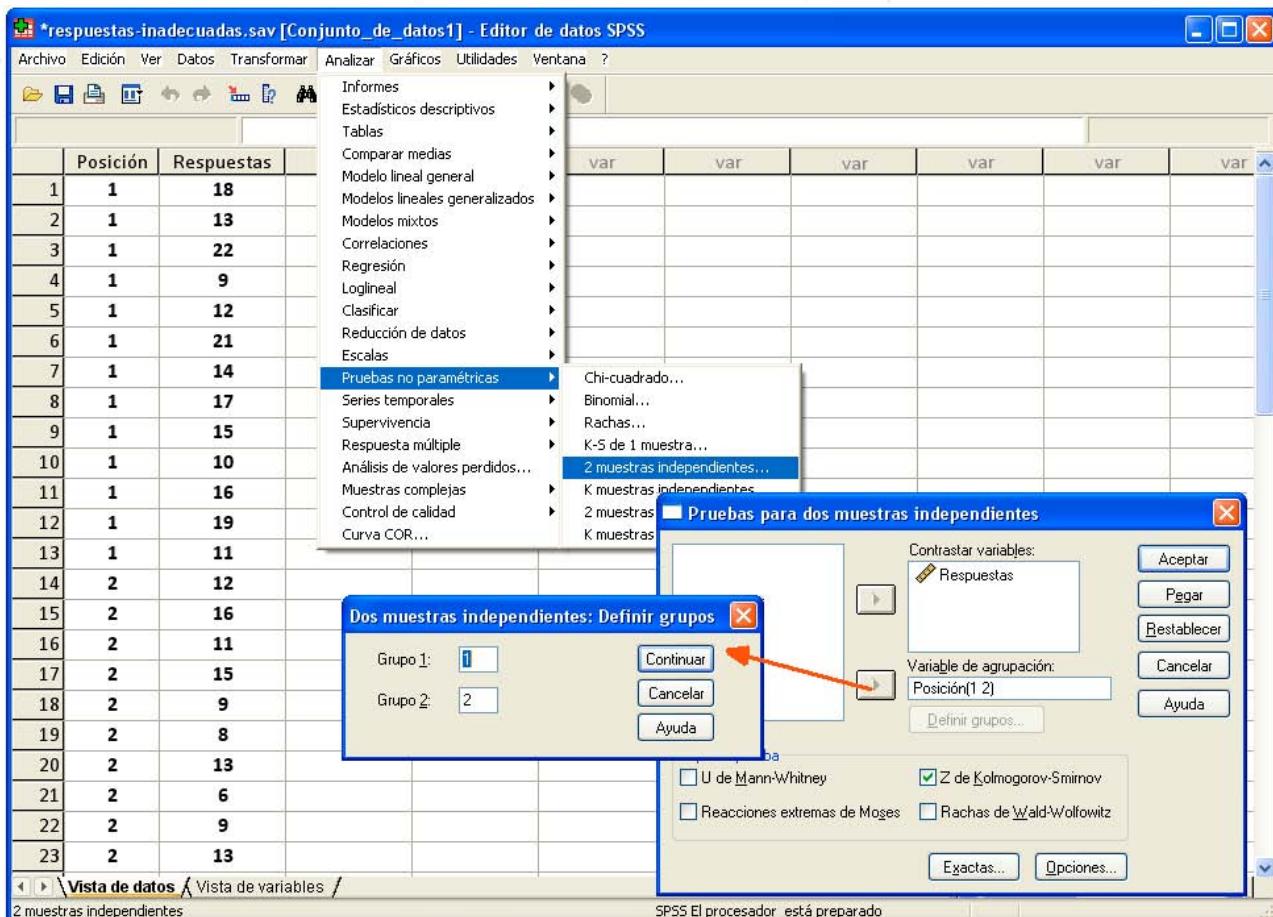
$x_i$	$n_{x_i}$	$y_i$	$n_{y_i}$	$N_{x_i}$	$N_{y_i}$	$F_{n_1}(x)$	$G_{n_2}(x)$	$G_{n_2}(x) - F_{n_1}(x)$
	0	6	1	0	1	0	0,0833	0,0833
	0	7	1	0	2	0	0,1667	0,1667
	0	8	1	0	3	0	0,2500	0,2500
9	1	9	2	1	5	0,0769	0,4167	0,3397
10	1		0	2	5	0,1538	0,4167	0,2628
11	1	11	1	3	6	0,2308	0,5000	0,2692
12	1	12	1	4	7	0,3077	0,5833	0,2756
13	1	13	2	5	9	0,3846	0,7500	0,3654
14	1		0	6	9	0,4615	0,7500	0,2885
15	1	15	1	7	10	0,5385	0,8333	0,2949
16	1	16	1	8	11	0,6154	0,9167	0,3013
17	1		0	9	11	0,6923	0,9167	0,2244
18	1		0	10	11	0,7692	0,9167	0,1474
19	1		0	11	11	0,8462	0,9167	0,0705
21	1		0	12	11	0,9231	0,9167	-0,0064
22	1	22	1	13	12	1	1	0
	13		12					

$$D_{n_1, n_2}^- = \max [G_{n_2}(x) - F_{n_1}(x)] = 0,3654 \quad D_{n_1, n_2}^+ = \max [F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)] = -0,0064$$

$$\text{El valor crítico } D_{\alpha, n_1, n_2} = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} \cdot C_{KS} = \sqrt{\frac{13 + 12}{13 \cdot 12}} \cdot 1,5174 = 0,60744$$

Siendo  $D_{n_1, n_2}^- = 0,3654 < 0,60744 = D_{\alpha, n_1, n_2}$  → Se acepta la hipótesis nula al 1% de significación. En consecuencia, el estrés es mayor en la ciudad A.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



The screenshot shows the SPSS interface with the menu path "Analizar > Pruebas no paramétricas > 2 muestras independientes...". The main window displays a data table with two columns: "Posición" and "Respuestas". The "Respuestas" column contains values ranging from 9 to 22. The "Pruebas para dos muestras independientes" dialog box is open, with the "Continuar" button highlighted by a red arrow. Other buttons include "Cancelar", "Ayuda", "Definir grupos...", "Exactas...", and "Opciones...". The "Contrastar variables:" section shows "Respuestas" selected. The "Variable de agrupación:" section shows "Posición(1 2)" selected.

### Estadísticos de contraste<sup>a</sup>

		Respuestas
Diferencias más extremas	Absoluta	,3654
	Positiva	,0064
	Negativa	-,3654
<b>Z de Kolmogorov-Smirnov</b>		,9127
<b>Sig. asintót. (bilateral)</b>		,3754

a. Variable de agrupación: Posición

El  $p\_valor = 1 - 0,3754 / 2 = 0,8123 > 0,01 = \alpha$  del contraste unilateral a la izquierda  $F(z) \geq G(z)$ , con lo que se acepta la hipótesis nula, con una significación del 1%. En consecuencia, la ciudad A presenta mayor estrés.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

Utilizando la prueba de la Mediana

Se establece el contraste unilateral a la izquierda:  $H_0: M_{e_x} \geq M_{e_y}$      $H_1: M_{e_x} < M_{e_y}$

donde  $M_{e_x}$  y  $M_{e_y}$  son las correspondientes medianas poblacionales.

Estadístico de contraste:  $V =$  Número de observaciones de X menores o iguales que la mediana de la muestra conjunta de  $n_1 + n_2$  elementos.

Para calcular el valor experimental de V se calcula la mediana de la muestra conjunta, habiendo ordenado todas las observaciones de menor a mayor.

6	7	8	9	9	9	10	11	11	12	12	13	13	13	14	15	15	16	16	16	17	18	19	21	22
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Como  $n = n_1 + n_2 = 13 + 12 = 25$  es impar, la mediana será la observación que ocupa el lugar

$$\frac{(n+1)}{2} = \frac{(25+1)}{2} = 13, \text{ es decir, } m_e = 13$$

x <sub>1</sub>	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	22
----------------	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$$\rightarrow V = 5$$

Siendo  $n_1 = 13 > 10$  y  $n_2 = 12 > 10$  se aproxima mediante una distribución normal:

$$V \sim N(E[V], \text{Var}[V]) \text{ con } n = 25 \text{ impar} \rightarrow k = \frac{n-1}{2} = 12$$

$$E[V] = k \cdot \frac{n_1}{n} = 12 \cdot \frac{13}{25} = 6,24 \quad \text{Var}[V] = k \cdot \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_2}{n} \cdot \frac{n-k}{n-1} = 12 \cdot \frac{13}{25} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{25-12}{25-1} = 1,6224$$

$$\text{Estadístico contraste: } z_p = \frac{V - E[V]}{\sqrt{\text{Var}[V]}} = \frac{5 - 6,24}{\sqrt{1,6224}} = -0,9735$$

Como  $z_p = -0,9735 > -2,33 = -z_{0,01}$  se acepta la hipótesis nula, por lo que se puede afirmar con una significación del 1%, que el estrés es mayor en la ciudad A.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

\*respuestas-inadecuadas.sav [Conjunto\_de\_datos1] - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

	Posición	Respuestas
1	1	18
2	1	13
3	1	22
4	1	9
5	1	12
6	1	21
7	1	14
8	1	17
9	1	15
10	1	10
11	1	16
12	1	19
13	1	11
14	2	12
15	2	16
16	2	11
17	2	15
18	2	9
19	2	8
20	2	13
21	2	6
22	2	9
23	2	13

Vista de datos Vista de variables /

K muestras independientes

Analizar → Pruebas no paramétricas → K muestras independientes...

Pruebas para varias muestras independientes

Contrastar variables: Respuestas

Variable de agrupación: Posición(1 2)

Tipo de prueba: H de Kruskal-Wallis (seleccionado), Mediana, Jonckheere-Terpstra

Aceptar, Pegar, Restablecer, Cancelar, Ayuda, Exactas..., Opciones...

SPSS El procesador está preparado

### Prueba de la mediana

Frecuencias

		Posición	
		1	2
Respuestas	> Mediana	8	3
	≤ Mediana	5	9

### Estadísticos de contraste<sup>a</sup>

	Respuestas
N	25
Mediana	13,00
Sig. exacta	,111

a. Variable de agrupación: Posición

El contraste unilateral a la izquierda tiene un  $p\_valor = 1 - 0,111 / 2 = 0,9445 > 0,01 = z_{0,01}$  por lo que se acepta la hipótesis nula de que el estrés es mayor en la ciudad A, con una significación del 1%.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

13. Durante los meses de declaración de la renta una sucursal bancaria decidió dar cita previa a los clientes para evitar largas esperas. A pesar de la media, los clientes esperan un tiempo medio de 5 minutos antes de ser atendidos. Determinado día se eligió al azar anotar los tiempos de espera de cada uno de los clientes, contabilizando los tiempos:

4      0      3      9      6,5      7,5      4      6      5,5

Para un nivel de significación del 5%, ¿se ajusta la muestra a una distribución exponencial?

**Solución:**

La distribución exponencial es una distribución de probabilidad continua con parámetro  $\lambda > 0$ , con función de densidad  $f(x_i) = P(x_i) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_i}$  y con función de distribución

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = 1 - e^{-\lambda \cdot x_i} \text{ para } x_i \geq 0 : E(X) = \frac{1}{\lambda}, V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Siendo la variable aleatoria  $X \equiv$  Tiempo de espera de cada uno de los clientes ,  $X \sim \exp(\lambda = 5)$

$$\text{En consecuencia, } E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5 \rightarrow \lambda = \frac{1}{5} = 0,2$$

Se plantea el contraste bilateral:  $H_0: X \sim \exp(0,2)$      $H_1: X \neq \exp(0,2)$

$$H_0: F_n(x) = F_0(x) \quad H_1: F_n(x) \neq F_0(x) \quad \text{siendo } \begin{cases} F_n(x) \equiv \text{verdadera distribución de la variable } X \\ F_0(x) \equiv \text{función de distribución de } \exp(0,2) \end{cases}$$

Utilizando el *test de Kolmogorov-Smirnov*

Estadístico de contraste:  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| = \max (a_i, b_i)$

$$a_i = |F_n(x_i) - F_0(x_i)| \quad b_i = |F_n(x_{i-1}) - F_0(x_i)|$$

Se acepta  $H_0$  si  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| < D_{\alpha, n}$  (valor crítico tabla Kolmogorov-Smirnov)

Se construye una tabla ordenando las observaciones y calculando  $F_0(x_i)$  ,  $F_n(x_i)$  ,  $|F_n(x_i) - F_0(x_i)|$  y

$$|F_n(x_{i-1}) - F_0(x_i)|$$

$F_0(x_i) \equiv$  Función de distribución: DISTR.EXP

$$F_n(x_i) \equiv \text{Función de distribución empírica de la muestra: } F_n(x_i) = \frac{\text{nº observaciones}}{n} = \frac{N(x_i)}{n}$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$x_i$	$n_i$	$N_i$	$F_n(x_i)$	$F_0(x_i)$	$ F_n(x_i) - F_0(x_i) $	$ F_n(x_{i-1}) - F_0(x_i) $
0	1	1	0,1111	0	0,1111	0
3	1	2	0,2222	0,4512	0,2290	0,3401
4	2	4	0,4444	0,5507	0,1062	0,3284
5,5	1	5	0,5556	0,6671	0,1116	0,2227
6	1	6	0,6667	0,6988	0,0321	0,1433
6,5	1	7	0,7778	0,7275	0,0503	0,0608
7,5	1	8	0,8889	0,7769	0,1120	0,0009
9	1	9	1	0,8347	0,1653	0,0542

$$F_n(0) = P(X \leq 0) = 1 - e^{-0,2 \cdot 0} = 0$$

$$F_n(3) = P(X \leq 3) = 1 - e^{-0,2 \cdot 3} = 0,4512$$

$$F_n(4) = P(X \leq 4) = 1 - e^{-0,2 \cdot 4} = 0,5507$$

$$\vdots = \vdots = \vdots = \vdots$$

$$F_n(9) = P(X \leq 9) = 1 - e^{-0,2 \cdot 9} = 0,8347$$

$$D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| = \max(a_i, b_i) = 0,3401$$

En la tabla de Kolmogorov-Smirnov:  $D_{0,05,9} = 0,387$

siendo,  $D_n = 0,3401 < 0,387 = D_{0,05,9} \rightarrow$  Se acepta la hipótesis nula, con un 5% de significación, afirmando que la espera de los clientes seguía una distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 0,2$

Valores críticos del test de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

Tamaño muestra	Test unilateral				
	$\alpha = 0,10$	0,05	0,025	0,01	0,005
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
8	0,358	0,410	0,454	0,507	0,542
9	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513
10	0,323	0,369	0,409	0,457	0,489

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

\*declaracion-renta.sav [Conjunto\_de\_datos1] - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

Calcular variable... Contar valores dentro de los casos... Recodificar en las mismas variables... Recodificar en distintas variables... Recodificación automática... Agrupación visual... Intervalos óptimos... Asignar rangos a casos... Asistente para fecha y hora... Crear serie temporal... Reemplazar valores perdidos... Generadores de números aleatorios... Ejecutar transformaciones pendientes Ctrl+G

	Control	E
1	1	
2	2	
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	
8	8	
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		

Vista de datos Vista de variables /

Calcular

SPSS El procesador está preparado

Calcular variable

Variable de destino: F\_exp\_muestra = CDF.EXP[Espera, 0,2]

Tipo y etiqueta...

Control Espera Frecuencia F\_exp\_muestra

Expresión numérica:

CDF.EXP[cant,escala]. Numérico. Devuelve la probabilidad acumulada de que un valor de la distribución exponencial, con el parámetro de escala dado, sea menor que la cantidad cant.

Grupo de funciones:

- Aritméticas
- Búsqueda
- Cadena
- Conversión
- Creación de duración del ítem
- Creación de fechas
- Cálculo de fechas
- Estadísticas
- Funciones de duración del ítem

Funciones y variables especiales:

- \$Casenum
- \$Date
- \$Date11
- \$Date1
- \$Sysmis
- \$Time
- Abs
- Any
- Arsin
- Artan
- Cdf Bernoulli
- Cdf Beta

Sí... (condición de selección de casos opcional)

Aceptar Pegar Restablecer Cancelar Ayuda

\*declaracion-renta.sav [Conjunto\_de\_datos1] - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

	Control	Espera	Frecuencia	F_exp_muestra
1	1	,0	1	,0000
2	2	3,0	1	,4512
3	3	4,0	2	,5507
4	4	5,5	1	,6671
5	5	6,0	1	,6988
6	6	6,5	1	,7275
7	7	7,5	1	,7769
8	8	9,0	1	,8347
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Vista de datos Vista de variables /

SPSS El procesador está preparado

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

Contrastar variables: F\_exp\_muestra

Distribución de contraste:

- Normal
- Poisson
- Uniforme
- Exponencial

Aceptar Pegar Restablecer Cancelar Ayuda Exactas... Opciones...

### Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

	F_exp_muestra
N	9 <sup>c</sup>
Parámetro exponencial. <sup>a,b</sup>	Media ,6572
Diferencias más extremas	Absoluta ,406
	Positiva ,406
	Negativa -.372
Z de Kolmogorov-Smirnov	1,148
Sig. asintót. (bilateral)	,143

p\_valor = 0,143 > 0,05 =  $\alpha$  → Se acepta la hipótesis nula, concluyendo que los datos se ajustan a una distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 0,2$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

14. En un test de coeficiente de inteligencia se anotaron las respuestas incorrectas que figuran en la tabla siguiente:

Intervalos $L_{i-1} - L_i$	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	100 – 110
Frecuencia $n_i$	30	25	120	10	10	5

Con un nivel de significación del 5%, ¿se ajusta la muestra a una distribución exponencial?. Utilizar el test de Kolmogorov-Smirnov y la prueba de la Chi-cuadrado.

**Solución:**

- ✓ Utilizando el *test de Kolmogorov-Smirnov*

Siendo la variable aleatoria  $X \equiv$  Respuestas inadecuadas en test de inteligencia ,  $X \sim \exp(\lambda)$

Se plantea el contraste bilateral:  $H_0: X \sim \exp(\lambda)$      $H_1: X \neq \exp(\lambda)$

$H_0: F_n(x) = F_0(x)$      $H_1: F_n(x) \neq F_0(x)$     siendo  $\begin{cases} F_n(x) \equiv \text{verdadera distribución de la variable } X \\ F_0(x) \equiv \text{función de distribución de } \exp(\lambda) \end{cases}$

Estadístico de contraste:  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| = \max (a_i, b_i)$

$$a_i = |F_n(x_i) - F_0(x_i)| \quad b_i = |F_n(x_{i-1}) - F_0(x_i)|$$

Se acepta  $H_0$  si  $D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| < D_{\alpha, n}$  (valor crítico tabla Kolmogorov-Smirnov)

$F_0(x_i) \equiv$  Función de distribución: DISTR.EXP( $x_1; (1/71); x_1:x_6$ )

$F_n(x_i) \equiv$  Función de distribución empírica de la muestra:  $F_n(x_i) = \frac{\text{nº observaciones}}{n} = \frac{N(x_i)}{n}$

Se construye una tabla ordenando las observaciones y calculando  $F_0(x_i)$  ,  $F_n(x_i)$  ,  $|F_n(x_i) - F_0(x_i)|$  y  $|F_n(x_{i-1}) - F_0(x_i)|$

Se utiliza el estimador de máxima verosimilitud del parámetro  $\lambda$ :  $\hat{\lambda} = \bar{x}$

La función de densidad y la función de distribución que se emplea, respectivamente, será:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-(1/\lambda) \cdot x} \quad y \quad F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-(1/\lambda) \cdot x}$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$x_i$	$n_i$	$x_i \cdot n_i$	$N_i$	$F_n(x_i)$	$F_0(x_i)$	$ F_n(x_i) - F_0(x_i) $	$ F_n(x_{i-1}) - F_0(x_i) $
55	30	1650	30	0,300	0,5391	0,2391	0,5391
65	25	1625	55	0,550	0,5997	0,0497	0,2997
75	20	1500	75	0,750	0,6523	0,0977	0,1023
85	10	850	85	0,850	0,6980	0,1520	0,0520
95	10	950	95	0,950	0,7376	0,2124	0,1124
105	5	525	100	1,000	0,7721	0,2279	0,1779
	100	7100					

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^6 x_i \cdot n_i = \frac{7100}{100} = 71 \rightarrow f(x) = \frac{1}{71} \cdot e^{-(1/71) \cdot x} \quad y \quad F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-(1/71) \cdot x}$$

$$F_n(55) = P(X \leq 55) = 1 - e^{-(1/71) \cdot 55} = 0,5391$$

$$F_n(65) = P(X \leq 65) = 1 - e^{-(1/71) \cdot 65} = 0,5997$$

$$F_n(75) = P(X \leq 75) = 1 - e^{-(1/71) \cdot 75} = 0,6523$$

$$\vdots = \vdots = \vdots = \vdots$$

$$F_n(105) = P(X \leq 105) = 1 - e^{-(1/71) \cdot 105} = 0,7721$$

$$D_n = \max |F_n(x_i) - F_0(x_i)| = \max (a_i, b_i) = 0,5391$$

En la tabla de Kolmogorov-Smirnov:  $D_{0,05, 100} = 0,13581$

siendo,  $D_n = 0,5391 > 0,13581 = D_{0,05, 9} \rightarrow$  Se rechaza la hipótesis nula, con un 5% de significación, afirmando que las respuestas inadecuadas del test de inteligencia no siguen una distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 1 / 71$

Valores críticos del test de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

Tamaño muestra	Test bilateral				
	$\alpha = 0,20$	0,10	0,050	0,02	0,010
Aproximación $n > 40$	$\frac{1,0730}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,2239}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,3581}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,5174}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,6276}{\sqrt{n}}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Prueba de Chi-cuadrado

Se plantea el contraste bilateral:

$H_0$ : Las respuestas inadecuadas siguen una distribución  $\exp(\lambda)$

$H_1$ : Las respuestas inadecuadas no siguen una distribución  $\exp(\lambda)$

La función de densidad que se emplea será:  $f(x) = \frac{1}{71} \cdot e^{-(x/71)}$

Intervalos $L_{i-1} - L_i$	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	100 – 110
$x_i$	55	65	75	85	95	105
$p_i = P(x = x_i)$	0,0649	0,0564	0,0490	0,0425	0,0370	0,0321
$e_i = n \cdot p_i$	6,49	5,64	4,90	4,26	3,70	3,21

$$p_1 = P(50 \leq X \leq 60) = \int_{50}^{60} \frac{1}{71} e^{-x/71} dx = -e^{-60/71} + e^{-50/71} = 0,0649$$

$$p_2 = P(60 \leq X \leq 70) = \int_{60}^{70} \frac{1}{71} e^{-x/71} dx = -e^{-70/71} + e^{-60/71} = 0,0564$$

$$p_3 = P(70 \leq X \leq 80) = \int_{70}^{80} \frac{1}{71} e^{-x/71} dx = -e^{-80/71} + e^{-70/71} = 0,0490$$

$$p_4 = P(80 \leq X \leq 90) = \int_{80}^{90} \frac{1}{71} e^{-x/71} dx = -e^{-90/71} + e^{-80/71} = 0,0425$$

$$p_5 = P(90 \leq X \leq 100) = \int_{90}^{100} \frac{1}{71} e^{-x/71} dx = -e^{-100/71} + e^{-90/71} = 0,0370$$

$$p_6 = P(100 \leq X \leq 110) = \int_{100}^{110} \frac{1}{71} e^{-x/71} dx = -e^{-110/71} + e^{-100/71} = 0,0321$$

$$P(X = x_i) = c_i \cdot f(x_i) = \frac{10}{71} \cdot e^{-(x_i/71)}$$

$$P(X = 55) = 10 \cdot f(55) = \frac{10}{71} \cdot e^{-(55/71)} = 0,0649 \quad P(X = 65) = 10 \cdot f(65) = \frac{10}{71} \cdot e^{-(65/71)} = 0,0564$$

$$P(X = 75) = 10 \cdot f(75) = \frac{10}{71} \cdot e^{-(75/71)} = 0,0490 \quad P(X = 85) = 10 \cdot f(85) = \frac{10}{71} \cdot e^{-(85/71)} = 0,0425$$

$$P(X = 95) = 10 \cdot f(95) = \frac{10}{71} \cdot e^{-(95/71)} = 0,0370 \quad P(X = 105) = 10 \cdot f(105) = \frac{10}{71} \cdot e^{-(105/71)} = 0,0321$$

Las frecuencias esperadas  $e_i = n \cdot p_i = 100 \cdot p_i$  de las modalidades no pueden ser menor que 5, en caso contrario se agrupan dos o más modalidades contiguas en una sola hasta lograr que la nueva frecuencia sea mayor que cinco.

En este sentido, se agrupan las modalidades de forma que queden los intervalos [70 – 90] y [90 – 110]

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Intervalos $L_{i-1} - L_i$	50 – 60	60 – 70	70 – 90	90 – 110
$x_i$	55	65	80	100
$n_i$	30	25	30	15
$p_i = P(x = x_i)$	0,0649	0,0564	0,0915	0,0691
$e_i = n \cdot p_i$	6,49	5,64	9,15	6,91

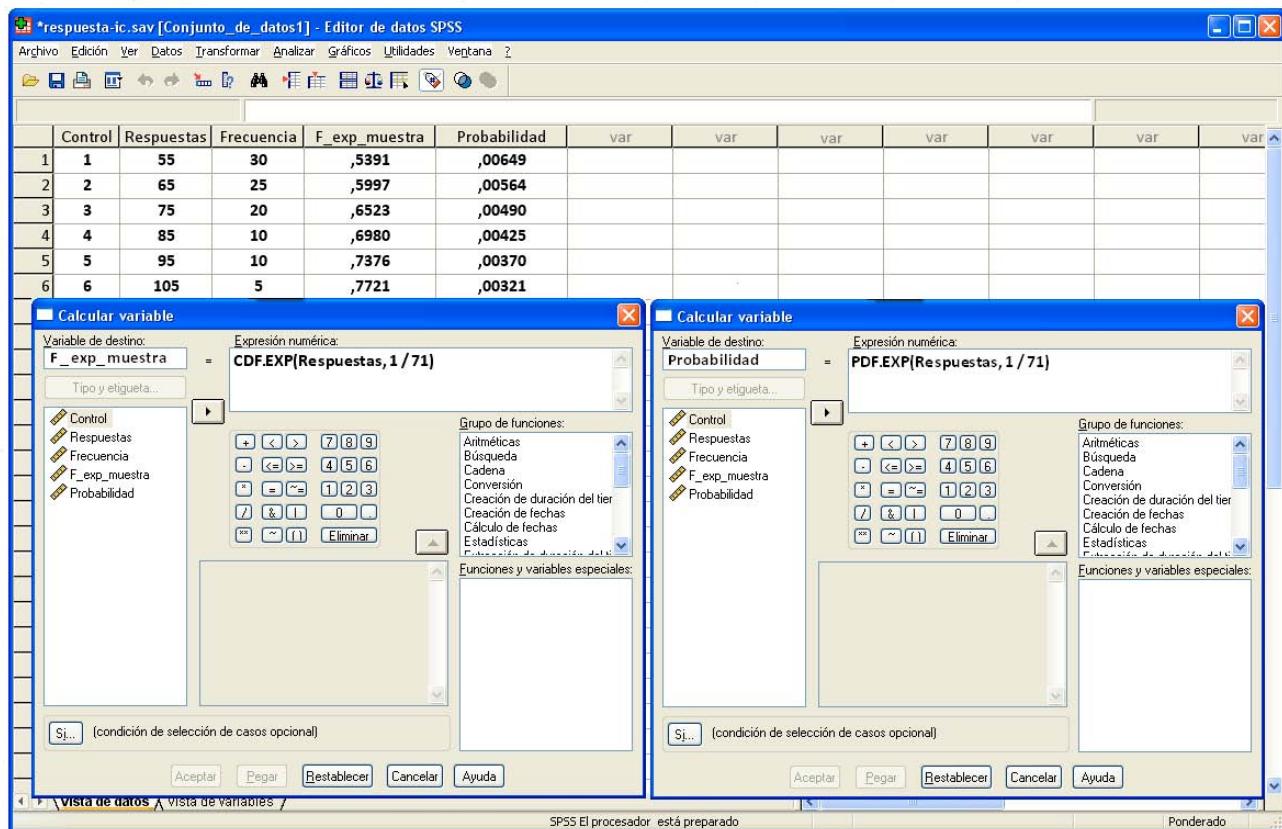
En este caso, los grados de libertad pasan a ser  $(k - p - 1)$ , con  $k = 4$  modalidades,  $p = 1$  parámetro  $\lambda$  que ha habido que calcular y  $-1$  por ser modalidades excluyentes.

El valor que se obtiene para la Chi-cuadrado de las observaciones es:

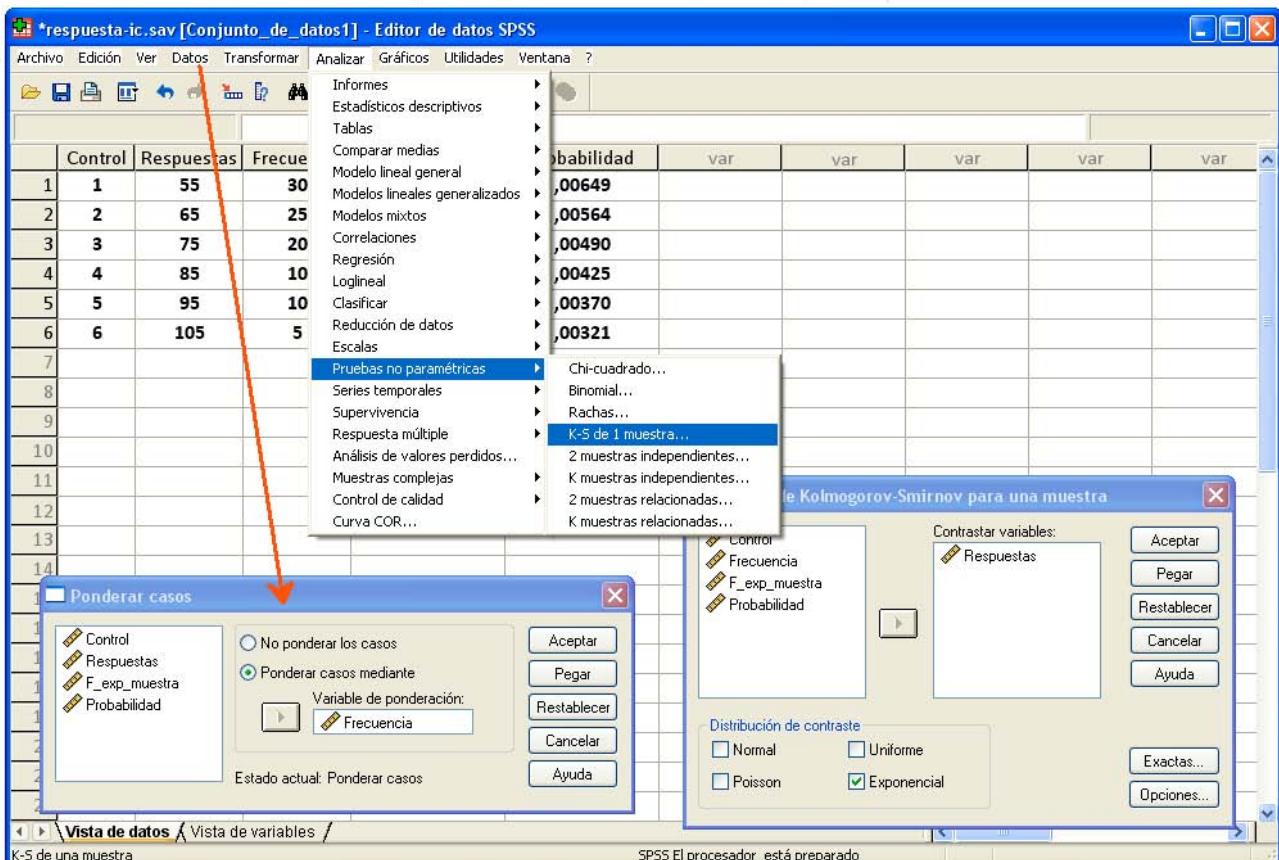
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(30 - 6,49)^2}{6,49} + \frac{(25 - 5,64)^2}{5,64} + \frac{(30 - 9,15)^2}{9,15} + \frac{(15 - 6,91)^2}{6,91} = 208,6026$$

Estadístico teórico:  $\chi^2_{\alpha, k-p-1} = \chi^2_{0,05, 2} = 5,991$

Como  $\chi^2 = 208,603 > 5,991 = \chi^2_{0,05, 2}$  se rechaza la hipótesis nula, deduciendo que las respuestas inadecuadas del test de inteligencia no siguen una distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 1 / 71$ , con una significación del 5%.



Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



#### Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

	Respuestas
N	100
Parámetro exponencial. <sup>a,b</sup>	Media
Diferencias más extremas	Absoluta ,539
	Positiva ,228
	Negativa -,539
Z de Kolmogorov-Smirnov	5,391
Sig. asintót. (bilateral)	,000

p\_valor = 0,00 < 0,05 =  $\alpha$  → Se rechaza la hipótesis nula. En consecuencia, las respuestas inadecuadas del test no siguen una distribución exponencial.

- a. La distribución de contraste es exponencial.
- b. Se han calculado a partir de los datos.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

15. En un vuelo se adjudican los asientos a pasajeros que proceden de dos agencias de viajes (A y B) de la forma que se presenta:

Asiento	Agencia viajes
1	A
2	B
3	B
4	B
5	A
6	B
7	A
8	B
9	B
10	B
11	B
12	A
13	A
14	B
15	B
16	A
17	B
18	A
19	A
20	A
21	B
22	B
23	B
24	B
25	A
26	A
27	B
28	A
29	B
30	B

¿Se han asignado los asientos aleatoriamente, con un nivel de significación del 5%?

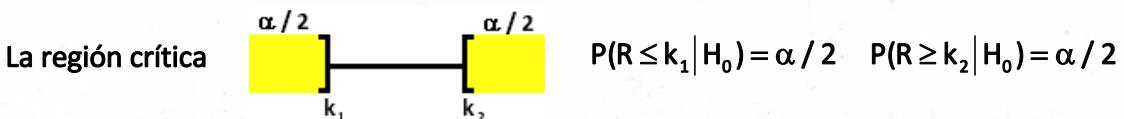
**Solución:**

Pra verificar si los asientos se han adjudicado aleatoriamente, se realiza el contraste bilateral:

$$H_0: \text{La muestra es aleatoria} \quad H_1: \text{La muestra no es aleatoria}$$

Estadístico de prueba:  $R = \text{"Número de rachas en la muestra"}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



Los valores críticos  $k_1$  y  $k_2$  se pueden obtener con las tablas de Wald-Wolfowitz

Se cuentan el número de rachas:

Agencia	A	BBB	A	B	A	BBBB	AA	BB	A	B	AAA	BBBB	AA	B	A	BB
Rachas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

$$R = 16 \text{ rachas} \quad \text{Asientos Agencia A} = n_1 = 12 \quad \text{Asientos Agencia B} = n_2 = 18$$

#### Valores críticos de la prueba de rachas nivel de significación del 5%

$$P[R \leq k_1 / H_0] = 0,25 \quad P[R \geq k_2 / H_0] = 0,25$$

$n_1$	$n_2$																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12 $K_2$	13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	21	22	22			
$K_1$	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10		

$k_1 = 9$  y  $k_2 = 21 \rightarrow k_1 = 9 < R = 16 < 21 = k_2$  con lo que el estadístico  $R$  se encuentra en la región de aceptación y, en consecuencia, la muestra puede considerarse aleatoria.

- Siendo  $n_1 = 12 > 10$  y  $n_2 = 18 > 10$  se puede aplicar la distribución asintótica normal de Wald y Wolfowitz, denotando por  $\gamma = \frac{n_1}{n}$  la proporción de observaciones de una categoría en la muestra de tamaño  $n$  se verifica que:  $R \xrightarrow{d} N[2\gamma(1-\gamma)n, 2\gamma(1-\gamma)\sqrt{n}]$

En esta línea,  $\gamma = \frac{n_1}{n} = \frac{12}{30} = 0,4$ , quedando la distribución normal:

$$R \sim N[2 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,4) \cdot 30, 2 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,4) \sqrt{30}] \equiv N(14,4, 2,629)$$

Los valores críticos  $k_1$  y  $k_2$  se determinan con el valor de significación  $\alpha = 0,05$ :

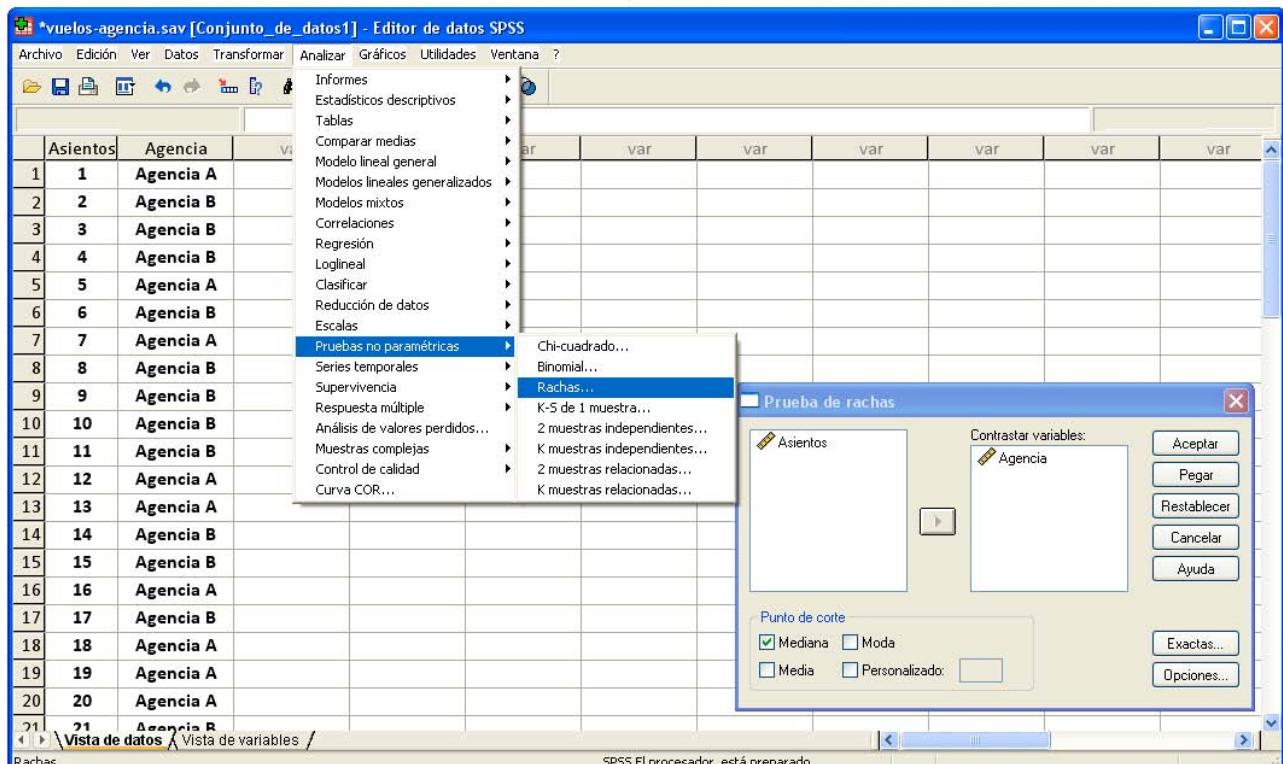
$$\begin{aligned} \alpha &= P[ET1] = P[Rechazar H_0 | H_0 \text{ Cierta}] = P[|R| / N(14,4, 2,629)] = \\ &= P[(R \leq k_1) \cup (R \geq k_2) / N(14,4, 2,629)] = P\left[\frac{R - 14,4}{2,629} \leq \frac{k_1 - 14,4}{2,629}\right] + P\left[\frac{R - 14,4}{2,629} \geq \frac{k_2 - 14,4}{2,629}\right] = \\ &= P\left[z \leq \frac{k_1 - 14,4}{2,629}\right] + P\left[z \geq \frac{k_2 - 14,4}{2,629}\right] = 0,025 + 0,025 \end{aligned}$$

$$P\left[z \leq \frac{k_1 - 14,4}{2,629}\right] = P\left[z \geq \frac{-k_1 + 14,4}{2,629}\right] = 0,025 \rightarrow \frac{-k_1 + 14,4}{2,629} = 1,96 \rightarrow k_1 = 9,247$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$$P\left[z \geq \frac{k_2 - 14,4}{2,629}\right] = 0,025 \rightarrow \frac{k_2 - 14,4}{2,629} = 1,96 \rightarrow k_2 = 19,553$$

El número de rachas  $R = 16$  se encuentra en la región de aceptación:  $9,247 < R = 16 < 19,553$  por lo que se acepta la hipótesis nula de aleatoriedad de los asientos del vuelo con una significación del 5%.



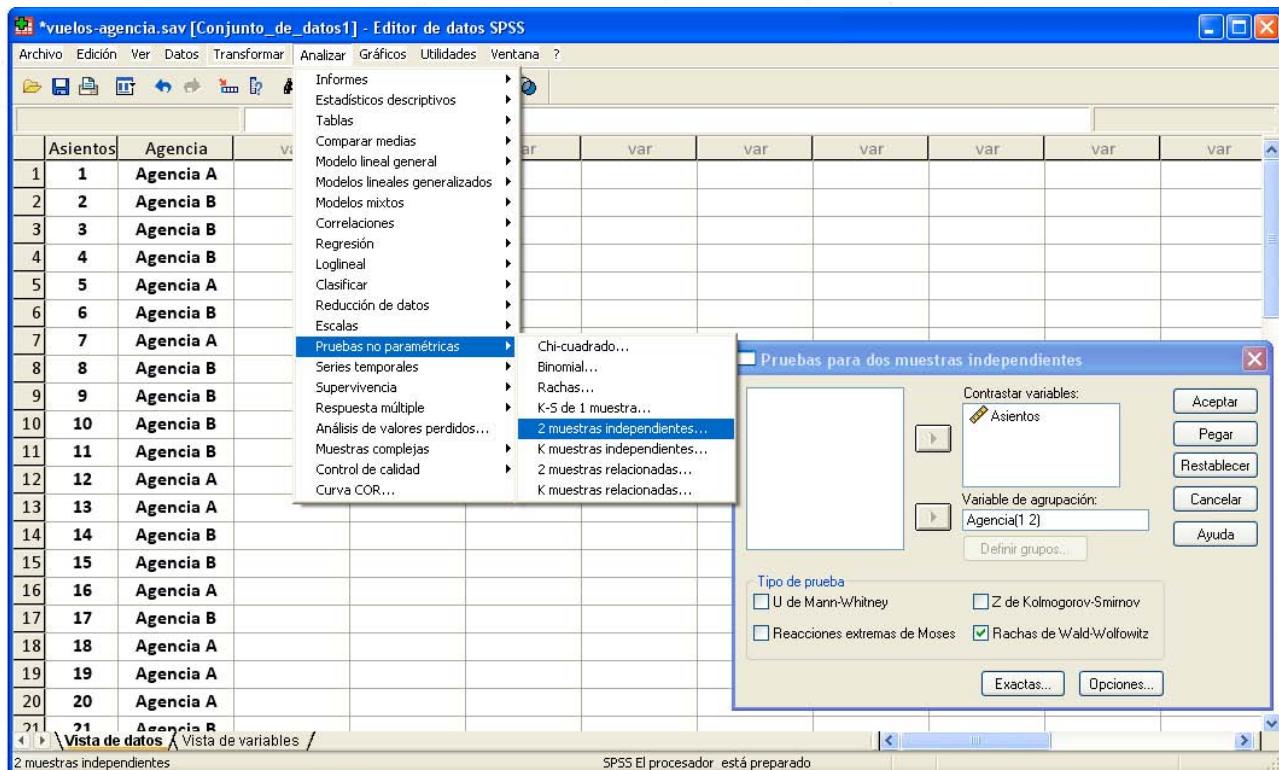
#### Prueba de rachas

	Agencia
Valor de prueba <sup>a</sup>	2
Casos < Valor de prueba	12
Casos $\geq$ Valor de prueba	18
Casos en total	30
Número de rachas	16
Z	,039
Sig. asintót. (bilateral)	,969

p\_valor (Sig. asintótica bilateral) = 0,969 > 0,05 =  $\alpha$

Por tanto, se admite la hipótesis nula  $H_0$  de aleatoriedad de la muestra.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....


**Prueba de Wald-Wolfowitz**
**Frecuencias**

	Agencia	N
Asientos	Agencia A	12
	Agencia B	18
Total		30

**Estadísticos de contraste<sup>b,c</sup>**

	Número de rachas	Z	Sig. exacta (unilateral)
Asientos	16 <sup>a</sup>	,426	,662

a. No se han hallado empates intra-grupo.

b. Prueba de Wald-Wolfowitz

c. Variable de agrupación: Agencia

El p\_valor (Sig. exacta unilateral) = 0,662 > 0,05 =  $\alpha$  → Se admite la hipótesis nula  $H_0$  de aleatoriedad de la muestra.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

16. La asociación de mutuas de accidentes analiza el número de bajas ocurridas en el último mes debidas a accidentes laborales, en empresas constructoras que realizan su actividad en la capital de provincia. Los datos recogidos aparecen en la tabla siguiente:

Intervalos $L_{i-1} - L_i$	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 12
Frecuencia $n_i$	22	35	32	3	3

Con un nivel de significación del 5%, ¿se ajusta la muestra a una distribución normal?. Utilizar la prueba de la Chi-cuadrado y la prueba de Lilliefors.

Solución:

✓ Prueba de la Chi-cuadrado

Contraste bilateral:  $H_0$ : El número de bajas sigue una distribución normal  
 $H_1$ : El número de bajas no sigue una distribución normal

El método de aplicación de la prueba de ajuste de mormalidad de la distribución de frecuencias por intervalos es como sigue en la tabla siguiente:

$L_{i-1} - L_i$	$x_i$	$n_i$	$N_i$	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$	$p_i$	$e_i = p_i \cdot n$
0 - 2	1	22	22	22	22	0,1802	17,11
2 - 4	3	35	57	105	315	0,3694	35,09
4 - 6	5	32	89	160	800	0,3017	28,66
6 - 8	7	3	92	21	147	0,0980	9,31
8 - 12	10	3	95	30	300	0,0132	1,25
	95		338	1584			

Se calculan las estimaciones de  $\mu$  y  $\sigma$ , empleando los estimadores que se obtienen por el método de máxima verosimilitud:  $\hat{\mu} = \bar{x} = 3,56$ ,  $\hat{\sigma} = \sigma_x = 2$

$$\hat{\mu} = \alpha_1 = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 x_i \cdot n_i = \frac{338}{95} = 3,56 \quad \alpha_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 x_i^2 \cdot n_i = \frac{1584}{95} = 16,674$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 16,674 - 3,56^2 = 4 \quad \hat{\sigma}_x = \sqrt{4} = 2$$

$$\hat{s}_x^2 = \frac{n \cdot \hat{\sigma}_x^2}{(n-1)} = \frac{95 \cdot 4}{94} = 4,043 \quad \hat{s}_x = \sqrt{4,043} = 2,01$$

Mediante la tabla normal se hallan las probabilidades de cada uno de los intervalos, utilizando una distribución normal  $N(3,56, 2)$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$$p_1 = P(0 \leq x < 2) = P\left[\frac{0 - 3,56}{2} \leq \frac{x - 3,56}{2} < \frac{2 - 3,56}{2}\right] = P(-1,78 \leq z < -0,78) = \\ = P(0,78 \leq z < 1,78) = P(z \geq 0,78) - P(z > 1,78) = 0,2177 - 0,0375 = 0,1802$$

$$p_2 = P(2 \leq x < 4) = P\left[\frac{2 - 3,56}{2} \leq \frac{x - 3,56}{2} < \frac{4 - 3,56}{2}\right] = P(-0,78 \leq z < 0,22) = \\ = P(z \geq -0,78) - P(z > 0,22) = P(z \leq 0,78) - P(z > 0,22) = 1 - P(z \geq 0,78) - P(z > 0,22) = \\ = 1 - 0,2177 - 0,4129 = 0,3694$$

$$p_3 = P(4 \leq x < 6) = P\left[\frac{4 - 3,56}{2} \leq \frac{x - 3,56}{2} < \frac{6 - 3,56}{2}\right] = P(0,22 \leq z < 1,22) = \\ = P(z \geq 0,22) - P(z > 1,22) = 0,4129 - 0,1112 = 0,3017$$

$$p_4 = P(6 \leq x < 8) = P\left[\frac{6 - 3,56}{2} \leq \frac{x - 3,56}{2} < \frac{8 - 3,56}{2}\right] = P(1,22 \leq z < 2,22) = \\ = P(z \geq 1,22) - P(z > 2,22) = 0,1112 - 0,0132 = 0,0980$$

$$p_5 = P(8 \leq x < 12) = P\left[\frac{8 - 3,56}{2} \leq \frac{x - 3,56}{2} < \frac{12 - 3,56}{2}\right] = P(2,22 \leq z < 4,22) = \\ = P(z \geq 2,22) - P(z > 4,22) = 0,0132 - 0,000013 = 0,0132$$

Como la frecuencia esperada  $e_5 = p_5 \cdot n = 0,0132 \cdot 95 = 1,254 < 5$  es necesario agrupar dos o más modalidades contiguas en una sola hasta lograr que la nueva frecuencia esperada sea mayor que cinco. En este sentido, se agrupan los intervalos 6 – 12 que pasa tener una frecuencia esperada  $e_4 = 9,31 + 1,25 = 10,56$

La tabla queda, Excel:  $p_i = F(b) - F(a) = \text{DISTR.NORM}(L_i; \hat{\mu}; \hat{\sigma}; 1) - \text{DISTR.NORM}(L_{i-1}; \hat{\mu}; \hat{\sigma}; 1)$

$L_{i-1} - L_i$	$x_i$	$n_i$	$p_i$	$e_i = p_i \cdot n$	$n_i^2$	$n_i^2 / e_i$
0 – 2	1	22	0,1802	17,11	484	28,279
2 – 4	3	35	0,3694	35,09	1225	34,910
4 – 6	5	32	0,3017	28,66	1024	35,727
6 – 12	9	6	0,1112	10,56	36	3,407
		95				102,324

Los grados de libertad son  $(k - p - 1)$  siendo  $k = 4$  el número de modalidades diferentes,  $p = 2$  ha sido necesario calcular 2 parámetros  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  y  $(-1)$  por ser las modalidades excluyentes.

Estadístico contraste:  $\chi^2_{4-2-1} = \sum_{i=1}^4 \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{n_i^2}{e_i} - n = 102,324 - 95 = 7,324$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Siendo  $\chi^2_1 = 7,324 > 3,841 = \chi^2_{0,05, 1}$  → Se rechaza la hipótesis nula, concluyendo que el número de bajas ocurridas en el último mes debidas a accidentes laborales no sigue una distribución normal, con una significación del 5%.

✓ Prueba de Lilliefors

Contraste bilateral:  $H_0$ : La muestra procede de una distribución normal  
 $H_1$ : La muestra no procede de una distribución normal

Estadístico contraste:  $D_n = \max |F_n(z) - F_0(z)| = \max(a_i, b_i)$

Se acepta  $H_0$  si  $D_n = \max |F_n(z) - F_0(z)| = \max(a_i, b_i) < D_{\alpha, n}$  (valor crítico tabla de Lilliefors)

Para determinar el estadístico de contraste se construye una tabla donde se ordenan los datos, tipificando cada valor, se calcula  $F_0(z_i)$ ,  $F_n(z_i)$  y se crean las columnas  $a_i = |F_0(z_i) - F_n(z_i)|$  y

$$b_i = |F_0(z_i) - F_n(z_{i-1})|$$

$$\text{Valores tipificados } z_i = \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{s}_x} = \frac{x_i - 3,56}{2,01}$$

$F_0(z_i)$  ≡ Función de distribución de una  $N(0, 1)$ : DISTR.NORM.ESTAND( $z_i$ )

$F_n(z_i)$  ≡ Función de distribución empírica de la muestra tipificada:  $F_n(z_i) = \frac{n^{\circ} \text{ observaciones}}{n} = \frac{N(z)}{n}$

$x_i$	$z_i$	$F_0(z_i)$	$F_n(z_i)$	$a_i =  F_0(z_i) - F_n(z_i) $	$b_i =  F_0(z_i) - F_n(z_{i-1}) $
1	-1,27	0,1021	0,2316	0,1295	0,1020
3	-0,28	0,3897	0,6000	0,2103	0,1581
5	0,72	0,7642	0,9368	0,1726	0,1642
7	1,71	0,9564	0,9684	0,0121	0,0196
10	3,20	0,9993	1	0,0007	0,0309

$$F_0(x_1) = P(X \leq 1) = P\left[\frac{X - \hat{\mu}}{\hat{s}_x} \leq \frac{1 - 3,56}{2,01}\right] = P(z \leq -1,27) = P(z \geq 1,27) = 0,1021$$

$$F_0(x_2) = P(X \leq 3) = P\left[\frac{X - \hat{\mu}}{\hat{s}_x} \leq \frac{3 - 3,56}{2,01}\right] = P(z \leq -0,28) = P(z \geq 0,28) = 0,3897$$

$$F_0(x_3) = P(X \leq 5) = P\left[\frac{X - \hat{\mu}}{\hat{s}_x} \leq \frac{5 - 3,56}{2,01}\right] = P(z \leq 0,72) = 1 - P(z \geq 0,72) = 1 - 0,2358 = 0,7642$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$$F_0(x_4) = P(X \leq 7) = P\left[\frac{X - \hat{\mu}}{\hat{s}_x} \leq \frac{7 - 3,56}{2,01}\right] = P(z \leq 1,71) = 1 - P(z \geq 1,71) = 1 - 0,0436 = 0,9564$$

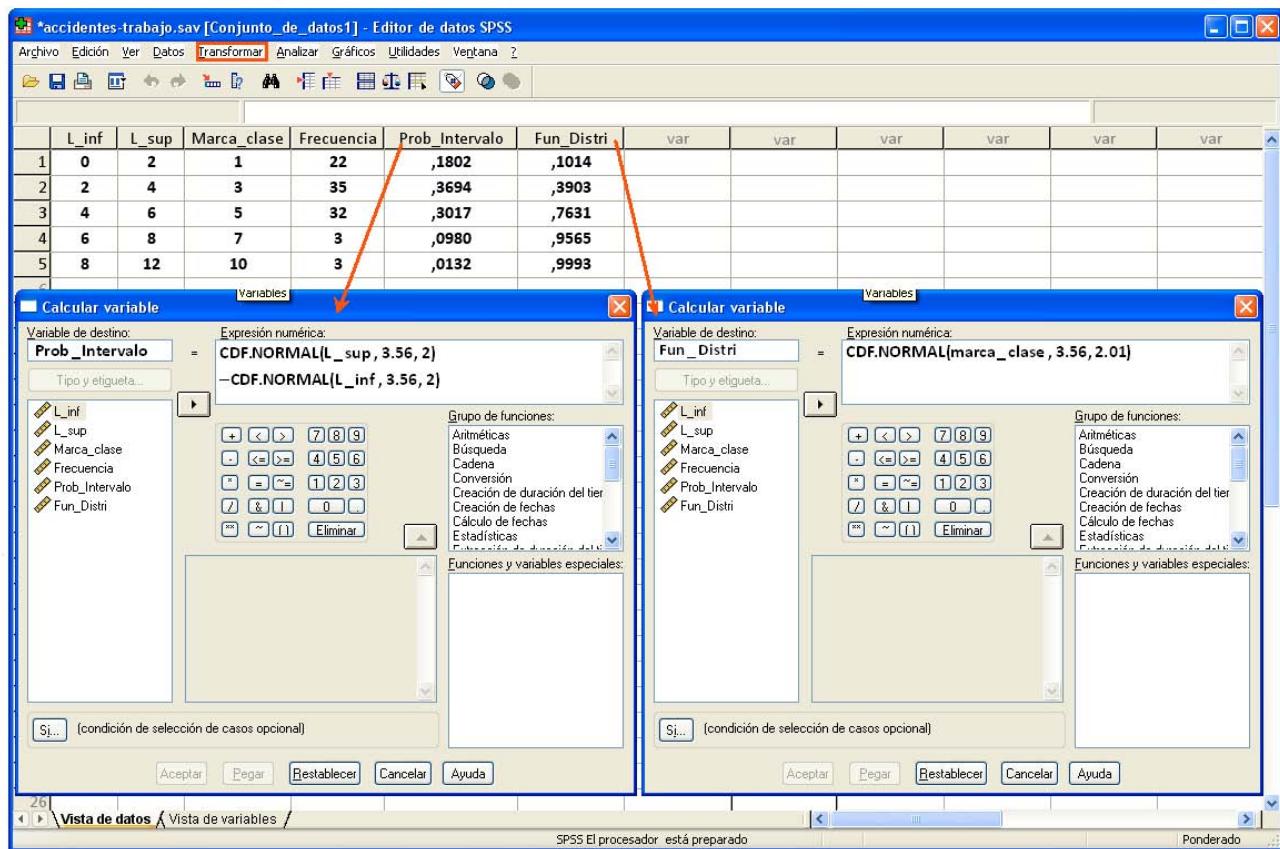
$$F_0(x_4) = P(X \leq 10) = P\left[\frac{X - \hat{\mu}}{\hat{s}_x} \leq \frac{10 - 3,56}{2,01}\right] = P(z \leq 3,20) = 1 - P(z \geq 3,20) = 1 - 0,0007 = 0,9993$$

$$D_n = \max(a_i, b_i) = 0,2103 > 0,09 = \frac{0,886}{\sqrt{95}} = D_{0,05, 95} \text{ (valor crítico tabla de Lilliefors)}$$

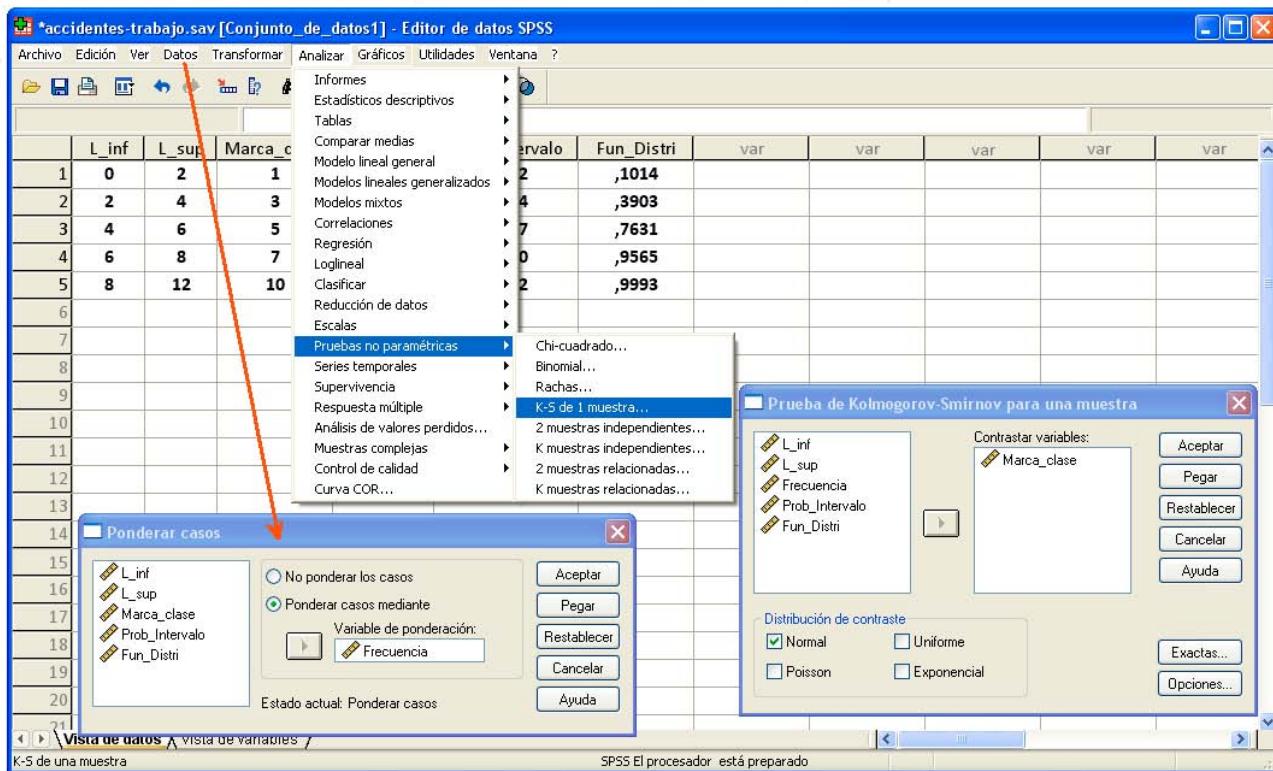
Por lo que se rechaza la hipótesis nula de normalidad para la muestra, con un nivel de significación del 5%

Valores críticos del test de Lilliefors de normalidad

	Nivel de significación $\alpha$				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
Aproximación $n > 30$	0,736 $\frac{1}{\sqrt{n}}$	0,768 $\frac{1}{\sqrt{n}}$	0,805 $\frac{1}{\sqrt{n}}$	0,886 $\frac{1}{\sqrt{n}}$	1,031 $\frac{1}{\sqrt{n}}$



Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....



### Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

	Marca_clase
N	95
Parámetros normales <sup>a,b</sup>	3,56
Media	
Desviación típica	2,014
Diferencias más extremas	,209
Absoluta	
Positiva	,209
Negativa	-,163
Z de Kolmogorov-Smirnov	2,038
Sig. asintót. (bilateral)	,000

a. La distribución de contraste es la Normal.

b. Se han calculado a partir de los datos.

$p\_valor(\text{Sig. asintótica bilateral}) = 0 < 0,05 = \alpha \rightarrow \text{Se rechaza la hipótesis nula de normalidad, con un nivel de significación del } 5\%$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

17. Para tratar de evaluar las diferentes capacidades por sexo, se somete a un examen lógico a una muestra de hombres y mujeres, obteniendo las siguientes puntuaciones:

Hombres	52,48	72,98	73,8	22,14	36,9	82	73,8	40,18	24,6	57,4	123
Mujeres	65,6	48,38	82	123	143,5	73,8	24,6	26,24	49,2	65,6	131,2

Con una significación del 5%, ¿existen diferencias significativas entre hombres y mujeres en cuanto a la dispersión de las puntuaciones?. Utilizar el contraste de Siegel-Tukey.

#### Solución:

Se establece el contraste bilateral:  $H_0: \sigma_H = \sigma_M$        $H_1: \sigma_H \neq \sigma_M$

Estadístico contraste:  $R_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot c_i$     donde,  $c_i = \begin{cases} 1 & \text{valor de H} \\ 0 & \text{valor de M} \end{cases}$

Para calcular el estadístico de contraste  $R_n$  es necesario calcular los rangos  $a_i$ , ordenando las puntuaciones muestrales conjuntas de menor a mayor, asignando primero al coeficiente instrumental  $c_i = 1$  para las puntuaciones de hombres y después  $c_i = 0$  para las puntuaciones de mujeres.

$a_i$  ≡ Coeficientes obtenidos al asignar los rangos según el método de Siegel-Tukey: La clasificación se realiza alternando extremos (el rango 1 es el más bajo, 2 y 3 son los dos más altos, 4 y 5 son los dos más bajos, y así sucesivamente).

Cuando el número total de observaciones es un número impar, se ignorará la observación central.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

	a	a <sub>i</sub>	c <sub>i</sub>	a <sub>i</sub> . c <sub>i</sub>
H	22,14	1	1	1
H	24,6	4	1	4
M	24,6	5	0	0
M	26,24	8	0	0
H	36,9	9	1	9
H	40,18	12	1	12
M	48,38	13	0	0
M	49,2	16	0	0
H	52,48	17	1	17
H	57,4	20	1	20
M	65,6	21	0	0
M	65,6	22	0	0
H	72,98	19	1	19
H	73,8	18	1	18
H	73,8	15	1	15
M	73,8	14	0	0
H	82	11	1	11
M	82	10	0	0
H	123	7	1	7
M	123	6	0	0
M	131,2	3	0	0
M	143,5	2	0	0
				133

$$n_1 = 11 \quad n_2 = 11 \quad n = n_1 + n_2 = 22 \quad R_{22} = \sum_{i=1}^{22} a_i \cdot c_i = 133$$

Como las muestras son grandes ( $n_1 = 11 > 10$  y  $n_2 = 11 > 10$ ) se emplea la aproximación asintótica a una distribución normal  $N(0, 1)$ :

$$z_p = \frac{|R_n - E[R_n]|}{\sqrt{V[R_n]}} \quad \text{donde, } E[R_n] = \frac{n_1 \cdot (n+1)}{2} \quad V[R_n] = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n+1)}{12}$$

Se acepta  $H_0$  si  $z_p \leq z_{\alpha/2}$

$$E[R_{22}] = \frac{11 \cdot (22+1)}{2} = 126,5 \quad V[R_{22}] = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n+1)}{12} = \frac{11 \cdot 11 \cdot (23)}{12} = 231,92$$

$$z_p = \frac{|R_{22} - E[R_{22}]|}{\sqrt{V[R_{22}]}} = \frac{|133 - 126,5|}{\sqrt{231,92}} = 0,4268 < 1,96 = z_{\alpha/2} = z_{0,025}$$

En consecuencia, se acepta la hipótesis nula, concluyendo que no existen diferencias significativas en cuanto a la dispersión de las puntuaciones, con un nivel de significación del 5%.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

18. En un estudio sobre las sanciones que recaen sobre empresas por incumplimiento de normas de seguridad en el trabajo se encontró que las sanciones medias eran las mismas en dos comunidades autónomas (X e Y). En cada comunidad se eligieron al azar expedientes sancionadores, presentando en la tabla adjunta los importes (expresados en cientos de euros).

X	78,4	119	32,2	89,6	105	128,8	63	53,2	93,8	56	102,2	18,2	72,8
Y	84	81,2	70	44,8	96,6	116,2	50,4	67,2	77	123,2	98	28	

Con un 10% de significación, ¿Podría afirmarse que existen diferencias significativas en cuanto a la dispersión de las sanciones de seguridad en el trabajo en las dos comunidades?

Utilizar el contraste de Siegel-Tukey.

#### Solución:

Se establece el contraste bilateral:  $H_0: \sigma_x = \sigma_y$      $H_1: \sigma_x \neq \sigma_y$

Estadístico contraste:  $R_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot c_i$  donde,  $c_i = \begin{cases} 1 & \text{valor de X} \\ 0 & \text{valor de Y} \end{cases}$

Para calcular el estadístico de contraste  $R_n$  es necesario calcular los rangos  $a_i$ , ordenando las puntuaciones muestrales conjuntas de menor a mayor, asignando primero al coeficiente instrumental  $c_i = 1$  para las sanciones de la comunidad X y después  $c_i = 0$  para las sanciones de la comunidad Y.

$a_i$  ≡ Coeficientes obtenidos al asignar los rangos según el método de Siegel-Tukey: La clasificación se realiza alternando extremos (el rango 1 es el más bajo, 2 y 3 son los dos más altos, 4 y 5 son los dos más bajos, y así sucesivamente).

En este caso el número total de observaciones  $n = n_x + n_y = 13 + 12 = 25$  es un número impar, se ignora la observación central.

Como las muestras son grandes ( $n_x = 13 > 10$  y  $n_y = 12 > 10$ ) se emplea la aproximación asintótica a una distribución normal  $N(0, 1)$ :

$$z_p = \frac{|R_n - E[R_n]|}{\sqrt{V[R_n]}} \quad \text{donde, } E[R_n] = \frac{n_x \cdot (n+1)}{2} \quad V[R_n] = \frac{n_x \cdot n_y \cdot (n+1)}{12}$$

Se acepta  $H_0$  si  $z_p \leq z_{\alpha/2}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Comunidades	a	a <sub>i</sub>	c <sub>i</sub>	a <sub>i</sub> . c <sub>i</sub>
X	18,2	1	1	1
Y	28	4	0	0
X	32,2	5	1	5
Y	44,8	8	0	0
Y	50,4	9	0	0
X	53,2	12	1	12
X	56	13	1	13
X	63	16	1	16
Y	67,2	17	0	0
Y	70	20	0	0
X	72,8	21	1	21
Y	77	24	0	0
X	78,4	-----	1	0
Y	81,2	23	0	0
Y	84	22	0	0
X	89,6	19	1	19
X	93,8	18	1	18
Y	96,6	15	0	0
Y	98	14	0	0
X	102,2	11	1	11
X	105	10	1	10
Y	116,2	7	0	0
X	119	6	1	6
Y	123,2	3	0	0
X	128,8	2	1	2
				134

$$R_{25} = \sum_{i=1}^{25} a_i \cdot c_i = 134$$

$$E[R_{25}] = \frac{n_x \cdot (n+1)}{2} = \frac{13 \cdot (25+1)}{2} = 169 \quad V[R_{25}] = \frac{n_x \cdot n_y \cdot (n+1)}{12} = \frac{13 \cdot 12 \cdot (25+1)}{12} = 338$$

$$z_p = \frac{|R_{25} - E[R_{25}]|}{\sqrt{V[R_{25}]}} = \frac{|134 - 169|}{\sqrt{338}} = 1,9037 > 1,645 = z_{\alpha/2} = z_{0,05}$$

En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula, concluyendo que existen diferencias significativas en cuanto a la dispersión de las sanciones de seguridad en el trabajo en las dos comunidades, con un nivel de significación del 10%.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

19. En la tabla adjunta aparecen dos muestras aleatorias simples que reflejan los costes laborales unitarios de dos sectores de producción A y B:

SECTOR A	SECTOR B
1200	1263
1150	1370
1326	1614
1480	1416
1235	1139
1215	1041
1515	1493
1375	1817
1296	1388
1463	1110
1514	
1409	
1268	
1377	
1091	

Con un nivel de significación del 5%, utilizando la prueba de Ansari-Bradley, se pide:

- a) Contrastar que los costes unitarios de los dos sectores tienen la misma dispersión, suponiendo que las medianas de las dos poblaciones son iguales.
- b) Contrastar que los costes unitarios de los dos sectores tienen la misma dispersión, suponiendo que las medianas de las dos poblaciones son distintas.

**Solución:**

- a) Siendo las dos poblaciones continuas se emplea la prueba de Ansari-Bradley

Se establece el contraste bilateral con las hipótesis:  $H_0: \sigma_A = \sigma_B$      $H_1: \sigma_A \neq \sigma_B$

Como las poblaciones son continuas se puede emplear la prueba de Ansari-Bradley

Se construye la muestra conjunta de tamaño  $n = n_A + n_B = 15 + 10 = 25 > 20$  (impar), por lo que se emplea la aproximación asintótica a una distribución normal  $N(0, 1)$ .

Se ordenan los valores de menor a mayor, dando al coeficiente instrumental  $c_i$  el valor 1 a los valores de A y 0 a los valores de B.

Se asigna a cada valor un coeficiente:  $R_i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}, \dots, 3, 2, 1$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

SECTOR A	SECTOR B	SECTORES A - B	POSICION	$c_i$	$R_i$	$c_i \cdot R_i$
1200	1263	1200	1041	0	1	0
1150	1370	1150	1091	1	2	2
1326	1614	1326	1110	0	3	0
1480	1416	1480	1139	0	4	0
1235	1139	1235	1150	1	5	5
1215	1041	1215	1200	1	6	6
1515	1493	1515	1215	1	7	7
1375	1817	1375	1235	1	8	8
1296	1388	1296	1263	0	9	0
1463	1110	1463	1268	1	10	10
1514		1514	1296	1	11	11
1409		1409	1326	1	12	12
1268		1268	1370	0	13	0
1377		1377	1375	1	12	12
1091		1091	1377	1	11	11
		1263	1388	0	10	0
		1370	1409	1	9	9
		1614	1416	0	8	0
		1416	1463	1	7	7
		1139	1480	1	6	6
		1041	1493	0	5	0
		1493	1514	1	4	4
		1817	1515	1	3	3
		1388	1614	0	2	0
		1110	1817	0	1	0
						113

$$W = \sum_{i=1}^{25} c_i \cdot R_i = 113$$

$$E(W) = \frac{n_A \cdot (n+1)^2}{4 \cdot n} = \frac{15 \cdot 26^2}{4 \cdot 25} = 101,4$$

$$V(W) = \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 3)}{48 \cdot n^2} = \frac{15 \cdot 10 \cdot 26 \cdot (25^2 + 3)}{48 \cdot 25^2} = 81,64$$

$$\text{Estadístico de contraste: } z_p = \frac{|W - E[W]|}{\sqrt{\text{Var}[W]}} = \frac{|113 - 101,4|}{\sqrt{81,64}} = 1,284$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Como  $z_p = 1,284 < 1,96 = z_{0,025}$  → Se acepta la hipótesis nula de igualdad de dispersiones.

b) Se establece el contraste bilateral con las hipótesis:  $H_0: \sigma_A = \sigma_B$      $H_1: \sigma_A \neq \sigma_B$

Como las poblaciones son continuas se puede emplear la prueba de Ansari-Bradley

Al no conocer las medianas de las poblaciones, para calcular el estadístico de contraste han de calcularse las medianas muestrales  $M_e^A$  y  $M_e^B$ . Para ello, se ordenan los valores muestrales de menor a mayor.

La Mediana del Sector A se obtiene al dividir  $n_A / 2 = 15 / 2 = 7,5$ , con lo que se encuentra en el octavo valor, es decir,  $M_e^A = 1326$  La Mediana del Sector A se obtiene al dividir  $n_A / 2 = 15 / 2 = 7,5$ , con lo que se encuentra en el octavo valor, es decir,  $M_e^A = 1326$

La Mediana del Sector B se obtiene al dividir  $n_B / 2 = 10 / 2 = 5$ , con lo que se encuentra en el quinto valor, esto es,  $M_e^B = 1370$

Se hacen las diferencias entre los valores muestrales y las correspondientes medianas:

$x_i - M_e^A$  y  $y_i - M_e^B$

SECTOR A	SECTOR B	$x_i - M_e^A$	$y_i - M_e^B$
1091	1041	-235	-329
1150	1110	-176	-260
1200	1139	-126	-231
1215	1263	-111	-107
1235	1370	-91	0
1268	1388	-58	18
1296	1416	-30	46
1326	1493	0	123
1375	1614	49	244
1377	1817	51	447
1409		83	
1463		137	
1480		154	
1514		188	
1515		189	

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Se construye la muestra conjunta de las diferencias de tamaño  $n = n_A + n_B$ , ordenando las diferencias de menor a mayor y dando al coeficiente instrumental  $c_i$  el valor 1 a las diferencias de A y 0 a las diferencias de B.

Después se asigna a cada valor un coeficiente  $R_i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}, \dots, 3, 2, 1$  atribuyendo el rango o coeficiente medio cuando hay diferencias repetidas.

$w_i$	$c_i$	$R_i$	$c_i \cdot R_i$
-329	0	1	0
-260	0	2	0
-235	1	3	3
-231	0	4	0
-176	1	5	5
-126	1	6	6
-111	1	7	7
-107	0	8	0
-91	1	9	9
-58	1	10	10
-30	1	11	11
0	0	12,5	0
0	1	12,5	12,5
18	0	12	0
46	0	11	0
49	1	10	10
51	1	9	9
83	1	8	8
123	0	7	0
137	1	6	6
154	1	5	5
188	1	4	4
189	1	3	3
244	0	2	0
447	0	1	0
			108,5

El estadístico de contraste W (suma de los coeficientes de la muestra procedente de A) será:

$$W = \sum_{i=1}^{25} c_i \cdot R_i = 108,5$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

*Señalar que estas diferencias no tienen una distribución exacta en el muestreo, tomando los resultados con cautela.*

Como el tamaño de la diferencia de la muestra conjunta  $n = n_A + n_B > 20$  se emplea la aproximación asintótica a una distribución normal  $N(0, 1)$ , considerando una varianza corregida por la presencia de valores repetidos:

$$E(W) = \frac{n_A \cdot (n+1)^2}{4 \cdot n} = \frac{15 \cdot 26^2}{4 \cdot 25} = 101,4$$

$$V_c(W) = \frac{n_A \cdot n_B \cdot \sum_{i=1}^g t_h \cdot R_h^2}{n \cdot (n-1)} - \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n+1)^4}{16 \cdot n^2 \cdot (n-1)}$$

$g \equiv$  Número de rangos diferentes cuando aparecen observaciones repetidas

$t_h \equiv$  Tamaño h-ésimo grupo

$R_h \equiv$  Rango medio h-ésimo grupo

Para hallar  $\sum_{i=1}^g t_h \cdot R_h^2$  se construye la tabla:

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$t_h$	$R_h$	$R_h^2$	$t_h \cdot R_h^2$
1	1	1	1
1	2	4	4
1	3	9	9
1	4	16	16
1	5	25	25
1	6	36	36
1	7	49	49
1	8	64	64
1	9	81	81
1	10	100	100
1	11	121	121
2	12,5	156,25	312,5
1	12	144	144
1	11	121	121
1	10	100	100
1	9	81	81
1	8	64	64
1	7	49	49
1	6	36	36
1	5	25	25
1	4	16	16
1	3	9	9
1	2	4	4
1	1	1	1
			1468,5

$$\sum_{i=1}^{24} t_h \cdot R_h^2 = 1468,5$$

$$V_c(W) = \frac{n_A \cdot n_B \cdot \sum_{i=1}^g t_h \cdot R_h^2}{n \cdot (n-1)} - \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n+1)^4}{16 \cdot n^2 \cdot (n-1)} = \frac{15 \cdot 10 \cdot 1468.5}{25 \cdot 24} - \frac{15 \cdot 10 \cdot 26^4}{16 \cdot 25^2 \cdot 24} = 81,515$$

$$\text{Estadístico de contraste: } z_p = \frac{|W - E[W]|}{\sqrt{V_c[W]}} = \frac{|108,5 - 101,4|}{\sqrt{81,515}} = 0,786$$

Como  $z_p = 0,786 < 1,96 = z_{0,025}$  → Se acepta la hipótesis nula de igualdad de dispersiones con un nivel de significación del 5% (probabilidad que se reparte a partes iguales en las dos colas de la distribución)

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

20. En la tabla adjunta se presentan los gastos diarios medios de los turistas que visitan dos ciudades españolas A y B.

$x_{iA}$	300	351	326	482	532	227	211	300	326	469	614	129	265	377
$x_{iB}$	128	300	189	97	223	341	493	63						

Sabiendo que la mediana de la población A es 400 y la de B es 250, con un nivel de significación del 5%, contrasta que los gastos medios de los turistas con destino A tienen una dispersión igual o menor que los del destino B. Utilizar la prueba de Ansari-Bradley.

**Solución:**

Se utiliza la prueba de Ansari-Bradley al ser dos poblaciones continuas.

Se establece el contraste unilateral a la derecha  $H_0: \sigma_A \leq \sigma_B$      $H_1: \sigma_A > \sigma_B$

Se hacen las diferencias entre los valores muestrales y las correspondientes medianas:

poblacionales  $x_{iA} - M_e^A = x_{iA} - 400$  y  $x_{iB} - M_e^B = x_{iB} - 250$

CIUDAD A	CIUDAD B	$x_{iA} - M_e^A$	$x_{iB} - M_e^B$
300	128	-100	-122
351	300	-49	50
326	189	-74	-61
482	97	82	-153
532	223	132	-27
227	341	-173	91
211	493	-189	243
300	63	-100	-187
326		-74	
469		69	
614		214	
129		-271	
265		-135	
377		-23	

Se construye la muestra conjunta de las diferencias de tamaño  $n = n_A + n_B$ , ordenando las diferencias de menor a mayor y dando al coeficiente instrumental  $c_i$  el valor 1 a las diferencias de A y 0 a las diferencias de B.

Después

se asigna a cada valor un coeficiente  $R_i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}, \dots, 3, 2, 1$  atribuyendo el rango o coeficiente medio cuando hay diferencias repetidas.

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$w_i$	$c_i$	$R_i$	$c_i \cdot R_i$
-271	1	1	1
-189	1	2	2
-187	0	3	0
-173	1	4	4
-153	0	5	0
-135	1	6	6
-122	0	7	0
-100	1	8,5	8,5
-100	1	8,5	8,5
-74	1	10,5	10,5
-74	1	10,5	10,5
-61	0	11	0
-49	1	10	10
-27	0	9	0
-23	1	8	8
50	0	7	0
69	1	6	6
82	1	5	5
91	0	4	0
132	1	3	3
214	1	2	2
243	0	1	0
			85

El estadístico de contraste  $W$  (suma de los coeficientes de la muestra procedente de A) será:

$$W = \sum_{i=1}^{22} c_i \cdot R_i = 85$$

Como el tamaño de la diferencia de la muestra conjunta  $n = n_A + n_B > 20$  se emplea la aproximación asintótica a una distribución normal  $N(0, 1)$ , considerando una varianza corregida por la presencia de valores repetidos:

$$E(W) = \frac{n_A \cdot (n+2)}{4} = \frac{14 \cdot 24}{4} = 84$$

$$V_c(W) = \frac{n_A \cdot n_B \cdot \sum_{i=1}^g t_h \cdot R_h^2}{n \cdot (n-1)} - \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n+2)^2}{16 \cdot (n-1)}$$

Para hallar  $\sum_{i=1}^g t_h \cdot R_h^2$  se construye la tabla:

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

$g \equiv$  Número de rangos diferentes cuando aparecen observaciones repetidas

$t_h \equiv$  Tamaño  $h$ -ésimo grupo

$R_h \equiv$  Rango medio  $h$ -ésimo grupo

$t_h$	$R_h$	$R_h^2$	$t_h \cdot R_h^2$
1	1	1	1
1	2	4	4
1	3	9	9
1	4	16	16
1	5	25	25
1	6	36	36
1	7	49	49
2	8,5	72,25	144,5
2	10,5	110,25	220,5
1	11	121	121
1	10	100	100
1	9	81	81
1	8	64	64
1	7	49	49
1	6	36	36
1	5	25	25
1	4	16	16
1	3	9	9
1	2	4	4
1	1	1	1
			1011

$$\sum_{i=1}^{20} t_h \cdot R_h^2 = 1011$$

$$V_c(W) = \frac{n_A \cdot n_B \cdot \sum_{i=1}^g t_h \cdot R_h^2}{n \cdot (n-1)} - \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n+2)^2}{16 \cdot (n-1)} = \frac{14 \cdot 8 \cdot 1011}{22 \cdot 21} - \frac{14 \cdot 8 \cdot 24^2}{16 \cdot 21} = 43,09$$

$$\text{Estadístico de contraste: } z_p = \frac{W - E[W]}{\sqrt{V_c[W]}} = \frac{85 - 84}{\sqrt{53,09}} = 0,137$$

Como  $z_p = 0,137 < 1,645 = z_{0,05}$  → Se acepta la hipótesis nula, concluyendo que la dispersión del gasto medio en la ciudad A es menor o igual que el gasto medio de la ciudad B, con un nivel de significación del 5%

Asignatura..... Grupo.....  
Apellidos ..... Nombre.....  
Ejercicio del día .....

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Biometrika Tables  
for StatisticiansCambridge  
University

Binomial	Poisson	Normal	t - Student
Chi - cuadrado	Fisher - Snedecor	Kolmogorov - Smirnov	Lilliefors
Shapiro - Wilk	Rachas	Mann - Whitney	Kruskal - Wallis
Wilcoxon		Signo	Tau Kendall

Asignatura..... Grupo.....  
Apellidos ..... Nombre.....  
Ejercicio del día .....

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Distribución binomial $B(n; p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

<b>n</b>	<b>k</b>	<b>p</b>	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
<b>2 0</b>	0,9801	0,9026	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500		
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000	
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500	
<b>3 0</b>	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250		
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750	
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750	
<b>4 0</b>	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625		
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500	
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750	
<b>5 0</b>	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0312		
	1	0,0480	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1562	
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125	
<b>6 0</b>	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156		
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938	
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2437	0,2344	
<b>7 0</b>	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078		
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0603	0,0547	
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641	
<b>8 0</b>	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039		
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0312	
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094	
<b>9 0</b>	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020		
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176	
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703	
<b>10 0</b>	0,9044	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0012	0,0010		
	1	0,0914	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0867	0,0725	0,0403	0,0207	0,0114	0,0098	
	2	0,0042	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1951	0,1757	0,1209	0,0763	0,0495	0,0439	
<b>11 0</b>	0,8952	0,5602	0,3166	0,1666	0,0766	0,0271	0,0135	0,0071	0,0039	0,0016	0,0006	0,0003	0,0002		
	1	0,0901	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>12 0</b>	0,8859	0,5212	0,2902	0,1566	0,0661	0,0271	0,0135	0,0066	0,0033	0,0010	0,0005	0,0003	0,0002		
	1	0,0890	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176	
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703	
<b>13 0</b>	0,8766	0,4822	0,2636	0,1366	0,0466	0,0171	0,0071	0,0039	0,0016	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001		
	1	0,0938	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>14 0</b>	0,8673	0,4432	0,2342	0,1166	0,0366	0,0135	0,0066	0,0033	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001		
	1	0,0968	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>15 0</b>	0,8580	0,4042	0,2052	0,0900	0,0200	0,0071	0,0039	0,0016	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001		
	1	0,0985	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>16 0</b>	0,8487	0,3652	0,1762	0,0600	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
	1	0,0992	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>17 0</b>	0,8394	0,3262	0,1472	0,0300	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
	1	0,0996	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>18 0</b>	0,8301	0,2872	0,1182	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
	1	0,0999	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>19 0</b>	0,8208	0,2482	0,0892	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
	1	0,0999	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>20 0</b>	0,8115	0,2092	0,0602	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
	1	0,0999	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>21 0</b>	0,8022	0,1702	0,0312	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
	1	0,0999	0,3015	0,3574	0,3298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172	
	2	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051	
<b>22 0</b>	0,7930	0,1312	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
	1	0,0999	0,3015	0,3											

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Distribución de Poisson $P(\lambda)$

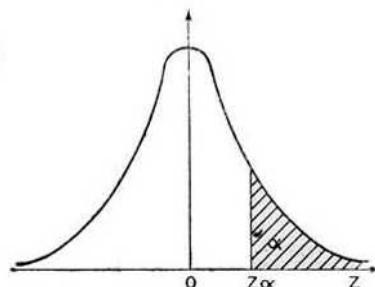
$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$\lambda$	$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000									
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	0,0000								
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0002	0,0000								
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001	0,0000							
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	0,0000							
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	0,0000	0,0000						
0,7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001	0,0000						
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002	0,0000						
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003	0,0001	0,0000					
1,0	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005							
1,1	0,3329	0,3662	0,2014	0,0738	0,0203	0,0045	0,0008	0,0001	0,0000					
1,2	0,3012	0,3614	0,2169	0,0867	0,0260	0,0062	0,0012	0,0002	0,0000					
1,3	0,2725	0,3543	0,2303	0,0998	0,0324	0,0084	0,0018	0,0003	0,0001	0,0000				
1,4	0,2466	0,3452	0,2417	0,1128	0,0395	0,0111	0,0026	0,0005	0,0001	0,0000				
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,0008	0,0001	0,0000				
1,6	0,2019	0,3230	0,2584	0,1378	0,0551	0,0176	0,0047	0,0011	0,0002	0,0000				
1,7	0,1827	0,3106	0,2640	0,1496	0,0636	0,0216	0,0061	0,0015	0,0003	0,0001	0,0000			
1,8	0,1653	0,2975	0,2678	0,1607	0,0723	0,0260	0,0078	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000			
1,9	0,1496	0,2842	0,2700	0,1710	0,0812	0,0309	0,0098	0,0027	0,0006	0,0001	0,0000			
2,0	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	0,0000			
2,2	0,1108	0,2438	0,2681	0,1966	0,1082	0,0476	0,0174	0,0055	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000		
2,4	0,0907	0,2177	0,2613	0,2090	0,1254	0,0602	0,0241	0,0083	0,0025	0,0007	0,0002	0,0000		
2,6	0,0743	0,1931	0,2510	0,2176	0,1414	0,0735	0,0319	0,0118	0,0038	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	
2,8	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,1557	0,0872	0,0407	0,0163	0,0057	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000	
3,0	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001	
3,2	0,0408	0,1304	0,2087	0,2226	0,1781	0,1140	0,0608	0,0278	0,0111	0,0040	0,0013	0,0004	0,0001	
3,4	0,0334	0,1135	0,1929	0,2186	0,1858	0,1264	0,0176	0,0348	0,0148	0,056	0,0019	0,0006	0,0002	
3,6	0,0273	0,0984	0,1771	0,2125	0,1912	0,1377	0,0826	0,0425	0,0191	0,0076	0,0028	0,0009	0,0003	
3,8	0,0224	0,0850	0,1615	0,2046	0,1944	0,1477	0,0936	0,0508	0,0241	0,0102	0,0039	0,0013	0,0004	
4,0	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053	0,0019	0,0006	
5,0	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181	0,0082	0,0034		
6,0	0,0025	0,0149	0,0446	0,0892	0,1339	0,1606	0,1606	0,1377	0,1033	0,0688	0,0413	0,0225	0,0113	
7,0	0,0009	0,0064	0,0223	0,0521	0,0912	0,1277	0,1490	0,1490	0,1304	0,1014	0,0710	0,0452	0,0264	
8,0	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0573	0,0916	0,1221	0,1396	0,1396	0,1241	0,0993	0,0722	0,0481	
9,0	0,0001	0,0011	0,0050	0,0157	0,0337	0,0607	0,0911	0,1171	0,1318	0,1381	0,1186	0,0970	0,0728	
10,0	0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251	0,1137	0,0948		
$\lambda$	$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
5,0		0,0013	0,0005	0,0002										
6,0		0,0052	0,0022	0,0009	0,0003	0,0001								
7,0		0,0142	0,0071	0,0033	0,0014	0,0006	0,0002	0,0001						
8,0		0,0296	0,0169	0,0090	0,0045	0,0021	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001				
9,0		0,0504	0,0324	0,0193	0,0109	0,0058	0,0029	0,0014	0,0006	0,0003	0,0001			
10,0		0,0729	0,0521	0,0347	0,0217	0,0128	0,0071	0,0037	0,0019	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001	

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

Distribución normal  $N(0, 1)$

$$\int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \alpha$$



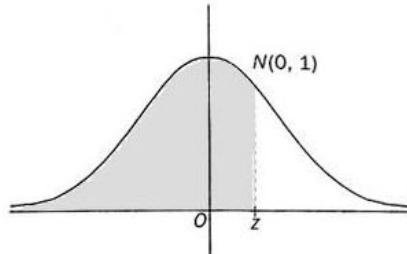
$z_\alpha$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,7	0,00256	0,00236	0,00226	0,00217	0,00207	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139

$z_\alpha$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0,00135	0,03968	0,03687	0,03483	0,03337	0,03233	0,03159	0,03108	0,03123	0,03481
4	0,0317	0,04207	0,04133	0,05854	0,05541	0,05340	0,05211	0,05130	0,06793	0,08479
5	0,06287	0,06170	0,07996	0,07579	0,07333	0,07190	0,07107	0,08599	0,08332	0,08182
6	0,0987	0,09530	0,09282	0,09149	0,010777	0,010402	0,010206	0,010104	0,011523	0,011260

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

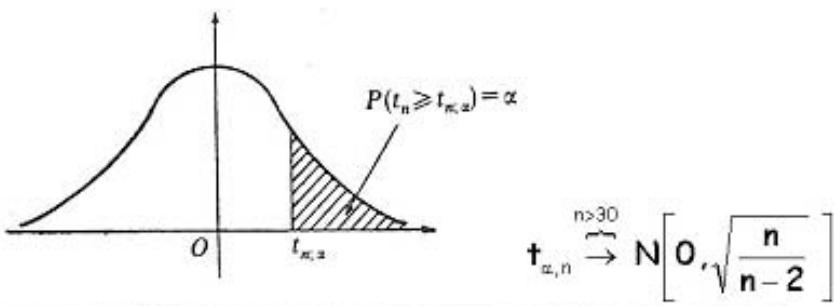
### DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, z \in \mathbb{R}$$



$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

 $1 - \frac{\alpha}{2}$  $1 - \frac{\alpha}{2}$  $1 - \frac{\alpha}{2}$  $1 - \frac{\alpha}{2}$  $1 - \frac{\alpha}{2}$

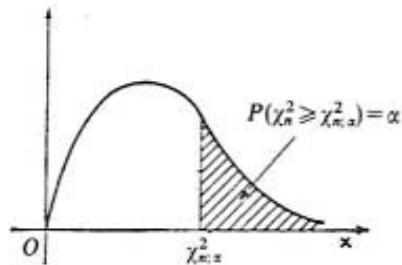
**Distribución  $t$  de Student**


$$t_{\alpha,n} = -t_{1-\alpha,n}$$

$n \setminus \alpha$	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,259	0,851	1,303	1,648	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,256	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
$\infty$	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Distribución $\chi^2$ de Pearson



$n \setminus \alpha$	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01
1	0,04393	0,03157	0,03628	0,03982	0,00393	0,0158	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635
2	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210
3	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	0,312	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409
18	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289
23	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980
25	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642
27	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892

$$\sqrt{2\chi_n^2} - \sqrt{2n-1} \xrightarrow{n>30} N(0,1)$$

$$\sqrt{2\chi_n^2} \xrightarrow{n>30} N[\sqrt{2n-1}, 1]$$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

**DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADA**

Grados de libertad	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.994
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.335
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
55	31.735	33.571	36.398	38.958	42.060	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
65	39.383	41.444	44.603	47.450	50.883	79.973	84.821	89.177	94.422	98.105
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
75	47.206	49.475	52.942	56.054	59.795	91.061	96.217	100.839	106.393	110.285
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
85	55.170	57.634	61.389	64.749	68.777	102.079	107.522	112.393	118.236	122.324
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
95	63.250	65.898	69.925	73.520	77.818	113.038	118.752	123.858	129.973	134.247
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.170

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Distribución *F* de Fisher-Snedecor

$$P(F_{n_1; n_2} \geq F_{n_1; n_2; \alpha}) = \alpha$$

$$\alpha = 0,10$$

$$F_{\alpha; n_1, n_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha; n_2, n_1}}$$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39,864	49,500	53,593	55,833	57,241	58,204	58,906	59,439	59,858
2	8,5263	9,0000	9,1618	9,2434	9,2926	9,3255	9,3491	9,3668	9,3805
3	5,5383	5,4624	5,3908	5,3427	5,3092	5,2847	5,2662	5,2517	5,2400
4	4,5448	4,3246	4,1908	4,1073	4,0506	4,0098	3,9790	3,9549	3,9357
5	0,0604	3,7797	3,6195	3,5202	3,4530	3,4045	3,3679	3,3393	3,3163
6	3,7760	3,4633	3,2888	3,1808	3,1075	3,0546	3,0145	2,9830	2,9577
7	3,5894	3,2574	3,0741	2,9605	2,8833	2,8274	2,7849	2,7516	2,7247
8	3,4579	3,1131	2,9238	2,8064	2,7265	2,6683	2,6241	2,5893	2,5612
9	3,3603	3,0065	2,8129	2,6927	2,6106	2,5509	2,5053	2,4694	2,4403
10	3,2850	2,9245	2,7277	2,6053	2,5216	2,4606	2,4140	2,3772	2,3473
11	3,2252	2,8595	2,6602	2,5362	2,4512	2,3891	2,3416	2,3040	2,2735
12	3,1765	2,8068	2,6055	2,4801	2,3940	2,3310	2,2828	2,2446	2,2135
13	3,1362	2,7632	2,5603	2,4337	2,3467	2,2830	2,2341	2,1953	2,1638
14	3,1022	2,7265	2,5222	2,3947	2,3069	2,2426	2,1931	2,1539	2,1220
15	3,0732	2,6952	2,4898	2,3614	2,2730	2,2081	2,1582	2,1185	2,0862
16	3,0481	2,6682	2,4618	2,3327	2,2438	2,1783	2,1280	2,0880	2,0553
17	3,0262	2,6446	2,4374	2,3077	2,2183	2,1524	2,1017	2,0613	2,0284
18	3,0070	2,6239	2,4160	2,5858	2,1958	2,1296	2,0785	2,0379	2,0047
19	2,9899	2,6056	2,3970	2,2663	2,1760	2,1094	2,0580	2,0171	1,9836
20	2,9747	2,5893	2,3801	2,2489	2,1582	2,0913	2,0397	1,9985	1,9649
21	2,9609	2,5746	2,3649	2,2333	2,1423	2,0751	2,0232	1,9819	1,9480
22	2,9486	2,5613	2,3512	2,2193	2,1279	2,0605	2,0084	1,9668	1,9327
23	2,9374	2,5493	2,3387	2,2065	2,1149	2,0472	1,9949	1,9531	1,9189
24	2,9271	2,5383	2,3274	2,1949	2,1030	2,0351	1,9826	1,9407	1,9063
25	2,9177	2,5283	2,3170	2,1843	2,0922	2,0241	1,9714	1,9292	1,8947
26	2,9091	2,5191	2,3075	2,1745	2,0822	2,0139	1,9610	1,9188	1,8841
27	2,9012	2,5106	2,2987	2,1655	2,0730	2,0045	1,9515	1,9091	1,8743
28	2,8939	2,5028	2,2906	2,1571	2,0645	1,9959	1,9427	1,9001	1,8652
29	2,8871	2,4955	2,2831	2,1494	2,0566	1,9878	1,9345	1,8918	1,8560
30	2,8807	2,4887	2,2761	2,1422	2,0492	1,9803	1,9269	1,8841	1,8498
40	2,8354	2,4404	2,2261	2,0909	1,9968	1,9269	1,8725	1,8289	1,7929
60	2,7914	2,3932	2,1774	2,0410	1,9457	1,8747	1,8194	1,7748	1,7380
120	2,7478	2,3473	2,1300	1,9923	1,8959	1,8238	1,7675	1,7220	1,6843
$\infty$	2,7055	2,3026	2,0838	1,9449	1,8473	1,7741	1,7167	1,6702	1,6315

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Distribución *F* de Fisher-Snedecor

$\alpha = 0,10$

$n_2 \backslash n_1$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	50,195	60,705	61,220	61,740	62,002	62,265	62,529	62,794	63,061	63,328
2	9,3916	9,4081	9,4247	9,4413	9,4496	9,4579	9,4663	9,4746	9,4829	9,4913
3	5,2304	5,2156	5,2003	5,1845	5,1764	5,1681	5,1597	5,1512	5,1425	5,1337
4	3,9199	3,8955	3,8689	3,8443	3,8310	3,8174	3,8036	3,7896	3,7753	3,7607
5	3,2974	3,2682	3,2380	3,2067	3,1905	3,1741	3,1573	3,1402	3,1228	3,1050
6	2,9369	2,9047	2,8712	2,8363	2,8183	2,8000	2,7812	2,7620	2,7423	2,7222
7	2,7025	2,6681	2,6322	2,5947	2,5753	2,5555	2,5351	2,5142	2,4928	2,4708
8	2,5380	2,5020	2,4642	2,4246	2,4041	2,3830	2,3614	2,3391	2,3162	2,2926
9	2,4163	2,3789	2,3396	2,2983	2,2768	2,2547	2,2320	2,2085	2,1843	2,1592
10	2,3226	2,2841	2,2435	2,2007	2,1784	2,1554	2,1317	2,1072	2,0818	2,0554
11	2,2482	2,2087	2,1671	2,1230	2,1000	2,0762	2,0516	2,0261	1,9997	1,9721
12	2,1878	2,1474	2,1049	2,0597	2,0360	2,0115	1,9861	1,9597	1,9323	1,9036
13	2,1376	2,0966	2,0532	2,0070	1,9827	1,9576	1,9315	1,9043	1,8759	1,8462
14	2,0954	2,0537	2,0095	1,9625	1,9377	1,9119	1,8852	1,8572	1,8280	1,7973
15	2,0593	2,0171	1,9722	1,9243	1,8990	1,8728	1,8454	1,8168	1,7867	1,7551
16	2,0281	1,9854	1,9399	1,8913	1,8656	1,8388	1,8108	1,7816	1,7507	1,7182
17	2,0009	1,9577	1,9117	1,8624	1,8362	1,8090	1,7805	1,7506	1,7191	1,6856
18	1,9770	1,9333	1,8868	1,8368	1,8103	1,7827	1,7537	1,7232	1,6910	1,6567
19	1,9557	1,9117	1,8647	1,8142	1,7667	1,7382	1,7083	1,6988	1,6659	1,6308
20	1,9367	1,8924	1,8449	1,7938	1,7873	1,7592	1,7298	1,6768	1,6433	1,6074
21	1,9197	1,8750	1,8272	1,7756	1,7481	1,7193	1,6890	1,6569	1,6228	1,5862
22	1,9043	1,8593	1,8111	1,7590	1,7312	1,7021	1,6714	1,6389	1,6042	1,5668
23	1,8903	1,8450	1,7964	1,7439	1,7159	1,6864	1,6554	1,6224	1,5871	1,5490
24	1,8775	1,8319	1,7831	1,7302	1,7019	1,6721	1,6407	1,6073	1,5715	1,5327
25	1,8658	1,8200	1,7708	1,7175	1,6890	1,6589	1,6272	1,5934	1,5570	1,5176
26	1,8550	1,8090	1,7596	1,7059	1,6771	1,6468	1,6147	1,5805	1,5437	1,5036
27	1,8451	1,7989	1,7492	1,6951	1,6662	1,6356	1,6032	1,5686	1,5313	1,4906
28	1,8359	1,7895	1,7395	1,6852	1,6560	1,6252	1,5925	1,5575	1,5198	1,4784
29	1,8274	1,7808	1,7306	1,6759	1,6465	1,6155	1,5825	1,5472	1,5090	1,4670
30	1,8195	1,7727	1,7223	1,6673	1,6377	1,6065	1,5732	1,5376	1,4989	1,4564
40	1,7627	1,7146	1,6624	1,6052	1,5741	1,5411	1,5056	1,4672	1,4248	1,3769
60	1,7070	1,6574	1,6034	1,5435	1,5107	1,4755	1,4373	1,3952	1,3476	1,2915
120	1,6524	1,6012	1,5450	1,4821	1,4472	1,4094	1,3676	1,3203	1,2646	1,1926
$\infty$	1,5987	1,5458	1,4871	1,4206	1,3832	1,3419	1,2951	1,2400	1,1686	1,0000

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Distribución *F* de Fisher-Snedecor

$$P(F_{n_1; n_2} \geq F_{n_1; n_2; \alpha}) = \alpha$$

$$\alpha = 0,05$$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8868	8,8452	8,8123
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3883	6,2560	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2066	4,1468	4,0990
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8378	3,6875	3,5806	3,5005	3,4281	3,3881
9	5,1174	4,2565	3,8626	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458
15	5,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563
19	4,3808	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227
20	4,3513	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5900	2,5140	2,4471	2,3928
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3661
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821
26	4,2252	3,3690	2,9751	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655
27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501
28	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2782	2,2229
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107
40	4,0848	3,2317	2,8387	2,6060	2,4495	2,3359	2,2490	2,1802	2,1240
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2540	2,1665	2,0970	2,0401
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2900	2,1750	2,0867	2,0164	1,9588
$\infty$	2,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Distribución *F* de Fisher-Snedecor

$\alpha = 0,05$

$n_1 \backslash n_2$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	241,88	243,91	1245,95	248,01	249,05	250,09	251,14	252,20	253,25	254,32
2	19,396	19,413	19,429	19,446	19,454	19,462	19,471	19,479	19,487	19,496
3	8,7855	8,7446	8,7029	8,6602	8,6385	8,6166	8,5944	8,5720	8,5494	8,5265
4	5,9644	5,9117	5,8578	5,8025	5,7744	5,7459	5,7170	5,6878	5,6581	5,6281
5	4,7351	4,6777	4,6188	4,5581	4,5272	4,4957	4,4638	4,4314	4,3984	4,3650
6	4,0600	3,9999	3,9381	3,8742	3,8415	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6688
7	3,6365	3,5747	3,5108	3,4445	3,4105	3,3758	3,3404	3,3043	3,2674	3,2298
8	3,3472	3,2840	3,2184	3,1503	3,1152	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276
9	3,1373	3,0729	3,0061	2,9365	2,9005	2,8637	2,8259	2,7872	2,7475	2,7067
10	2,9782	2,9130	2,8450	2,7740	2,7372	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	2,8536	2,7876	2,7186	2,6464	2,6090	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
12	2,7534	2,6866	2,6169	2,5436	2,5055	2,4663	2,4259	2,3842	2,3410	2,2962
13	2,6710	2,6037	2,5331	2,4589	2,4202	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	2,6021	2,5342	2,4630	2,3879	2,3487	2,3082	2,2664	2,2230	2,1778	2,1307
15	2,5437	2,4753	2,4035	2,3275	2,2878	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	2,4935	2,4247	2,3522	2,2756	2,2354	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	2,4499	2,3807	2,3077	2,2304	2,1898	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
18	2,4117	2,3421	2,2686	2,1906	2,1497	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	2,3779	2,3080	2,2341	2,1555	2,1141	2,0712	2,0264	1,9796	1,9302	1,8780
20	2,3479	2,2776	2,2033	2,1242	2,0825	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432
21	2,3210	2,2504	2,1757	2,0960	2,0540	2,0102	1,9645	1,9165	1,8657	1,8117
22	2,2967	2,2258	2,1508	2,0707	2,0283	1,9842	1,9380	1,8895	1,8380	1,7831
23	2,2747	2,2036	2,1882	2,0476	2,0050	1,9605	1,9139	1,8649	1,8128	1,7570
24	2,2547	2,1834	2,1077	2,0267	1,9838	1,9390	1,8920	1,8424	1,7897	1,7331
25	2,2365	2,1649	2,0889	2,0075	1,9643	1,9192	1,8718	1,8217	1,7684	1,7110
26	2,2197	2,1479	2,0716	1,9898	1,9464	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	2,2043	2,1323	2,0558	1,9736	1,9299	1,8842	1,8361	1,7851	1,7307	1,6717
28	2,1900	2,1179	2,0411	1,9586	1,9147	1,8687	1,8203	1,7689	1,7138	1,6541
29	2,1768	2,1045	2,0275	1,9446	1,9005	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6377
30	2,1646	2,0921	2,0148	1,9317	1,8874	1,8409	1,7918	1,7396	1,6835	1,6223
40	2,0772	2,0035	1,9245	1,8389	1,7929	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
60	1,9926	1,9174	1,8364	1,7480	1,7001	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
120	1,9105	1,8337	1,7505	1,6587	1,6084	1,5543	1,4952	1,4290	1,3519	1,2539
$\infty$	1,8307	1,7522	1,6664	1,5705	1,5173	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Distribución *F* de Fisher-Snedecor

$$P(F_{n_1; n_2} \geq F_{n_1; n_2; \alpha}) = \alpha$$

$$\alpha = 0,01$$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052,2	4999,5	5403,3	5624,6	5763,7	5859,0	5928,3	5981,6	6022,5
2	98,503	99,000	99,166	99,249	99,299	99,332	99,356	99,374	99,388
3	34,116	30,817	29,457	28,710	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345
4	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,659
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158
6	13,745	10,925	9,7795	9,1483	8,7459	8,4661	8,2600	8,1016	7,9761
7	12,246	9,5466	8,4513	7,8467	7,4604	7,1914	6,9928	6,8401	6,7188
8	11,259	8,6491	7,5910	7,0060	6,6318	6,3707	6,1776	6,0289	5,9106
9	10,561	8,0215	6,9919	6,4221	6,0569	5,8018	5,6129	5,4071	5,3511
10	10,044	7,5194	6,5523	5,9943	5,6363	5,3858	5,2001	5,0567	4,9424
11	9,6400	7,2057	6,2167	5,6683	5,3160	5,0692	4,8861	4,7445	4,6315
12	9,3302	6,9266	5,9526	5,4119	5,0643	4,8206	4,6395	4,4994	4,3875
13	5,0708	6,7010	5,7394	5,2053	4,8616	4,6204	4,4410	4,3021	4,1911
14	8,8616	6,5149	5,5639	5,0354	4,6950	4,4558	4,2779	4,1399	4,0297
15	8,6831	6,3589	5,4170	4,8932	4,5556	4,3183	4,1415	4,0045	3,8948
16	8,5310	6,2262	5,2922	4,7726	4,4374	4,2016	4,2059	3,8896	3,7804
17	8,3997	6,1121	5,1850	4,6690	4,3359	4,1015	3,9267	3,7910	3,6822
18	8,2854	6,0129	5,0919	4,5790	4,2479	4,0146	3,8406	3,7054	3,5971
19	8,1850	5,9259	5,0103	4,5003	4,1704	3,9386	3,7653	3,6305	3,5225
20	8,0960	5,8489	5,9382	4,4307	4,1027	3,8714	3,6987	3,5644	3,4567
21	8,0166	5,7804	4,8740	4,3688	4,0421	3,8117	3,6396	3,5056	3,3981
22	7,9454	5,7190	4,8166	4,3134	3,9880	3,7583	3,5867	3,4530	3,3458
23	7,8811	5,6637	4,7649	4,2635	3,9392	3,7102	3,5390	3,4057	3,2986
24	7,8229	5,6136	4,7181	4,2184	3,8951	3,6667	3,4959	3,3679	3,2560
25	7,7698	5,5680	4,6755	4,1774	3,8550	3,6272	3,4568	3,3239	3,2172
26	7,7213	5,5263	4,6166	4,1400	3,8183	3,5911	3,4210	3,2884	3,1818
27	7,6767	3,4881	4,0009	4,1056	3,7848	3,5580	3,3882	3,2558	3,1494
28	7,6356	5,4529	4,5681	4,0740	3,7539	3,5276	3,3581	3,2259	3,1195
29	7,5976	5,4205	4,5378	4,0449	3,7254	3,4995	3,3302	3,1982	3,0920
30	7,5625	5,3904	4,5097	4,0179	3,6990	3,4735	3,3045	3,1726	3,0665
40	7,3141	5,1785	4,3126	3,8283	3,5138	3,2910	3,1238	2,9930	2,8876
60	7,0771	4,9774	4,1259	3,6491	3,3389	3,1187	2,9530	2,8233	2,7185
120	6,8510	4,7865	3,9493	3,4796	3,1735	2,9559	2,7918	2,6629	2,5586
$\infty$	6,6349	4,6052	3,7816	3,3192	3,0173	2,8020	2,6393	2,5113	2,4073

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

### Distribución *F* de Fisher-Snedecor

$$\alpha = 0,01$$

$n_1 \backslash n_2$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	6055,8	6106,3	6157,3	6708,7	6234,6	6260,7	6286,8	6313,0	6339,4	6366,0
2	99,399	99,416	99,432	99,449	99,458	99,466	99,474	99,483	99,491	99,501
3	27,229	27,052	26,872	26,690	26,598	26,505	26,411	26,316	26,221	26,125
4	14,546	14,374	14,198	14,020	13,929	13,838	13,745	13,652	15,558	13,463
5	10,051	9,8883	9,7222	9,5527	9,4665	9,3793	9,2912	9,2020	9,1118	9,0204
6	7,8741	7,7183	7,5590	7,3958	7,3127	7,2285	7,1432	7,0568	6,9690	6,8801
7	6,6201	6,4691	6,3143	6,1554	6,0743	5,9921	5,9084	5,8236	5,7372	5,6495
8	5,8143	5,6668	5,5151	5,3591	5,2793	5,1980	5,1156	5,0316	4,9460	4,8588
9	5,2565	5,1114	4,9621	4,8080	4,7290	4,6486	4,5667	4,4831	4,3978	4,3105
10	4,0492	4,7059	4,5582	4,4054	4,3269	4,2469	4,1653	4,0819	3,9965	3,9090
11	4,5393	4,3974	4,2509	4,0990	4,0209	3,9411	3,8596	3,7761	3,6904	3,6025
12	4,2961	4,1553	4,0096	3,8584	3,7805	3,7008	3,6192	3,5355	5,4494	3,3608
13	4,1003	3,9603	3,8154	3,6646	3,5868	3,5070	3,4253	3,3413	3,8548	3,1654
14	3,9394	3,8001	3,6557	3,5052	3,4274	3,3476	3,2656	3,1813	3,0942	3,0040
15	3,8049	3,6662	3,5222	3,3719	3,2940	3,2141	3,1319	3,0471	2,9595	2,8684
16	3,6909	3,5527	3,4089	3,2588	3,1808	3,1007	3,0182	2,9330	2,8447	2,7528
17	3,5931	3,4552	3,3117	3,1615	3,0835	3,0032	2,9205	2,8348	2,7459	2,6530
18	3,5082	3,3706	3,2273	3,0771	2,9990	2,9185	2,8354	2,7493	2,6597	2,5660
19	3,4338	3,2965	3,1533	3,0031	2,9249	2,8442	2,7608	2,6742	2,5839	2,4893
20	3,3682	3,2311	3,0880	2,9377	2,8594	2,7785	2,6947	2,6077	2,5168	2,4212
21	3,3098	3,1729	3,0299	2,8796	2,8011	2,7200	2,6359	2,5484	2,4568	2,3603
22	3,2576	3,1209	2,9780	2,8274	2,7488	2,6675	2,5831	2,4951	2,4029	2,3055
23	3,2106	3,0740	2,9311	2,7805	2,7017	2,6202	2,5355	2,4471	2,3542	2,2559
24	3,1681	3,0316	2,8887	2,7380	2,6591	2,5773	2,4923	2,4035	2,3099	2,2107
25	3,1294	2,9931	2,8502	2,6993	2,6203	2,5383	2,4530	2,3637	2,2695	2,1694
26	3,0941	2,9579	2,8150	2,6640	2,5848	2,5026	2,4170	2,3273	2,2325	2,1315
27	3,0618	2,9256	2,7827	2,6316	2,5522	2,4699	2,3840	2,2938	2,1984	2,0965
28	3,0320	2,8959	2,7530	2,6017	2,5223	2,4397	2,3535	2,2629	2,1670	2,0642
29	3,0045	2,8685	2,7256	2,5742	2,4946	2,4118	2,3253	2,2344	2,1378	2,0342
30	2,9791	2,8431	2,7002	2,5487	2,4689	2,3860	2,2992	2,2079	2,1107	2,0062
40	2,8005	2,6648	2,5216	2,3689	2,2880	2,2034	2,1162	2,0194	1,9172	1,8047
60	2,6318	2,4961	2,3523	2,1978	2,1154	2,0285	1,9360	1,8363	1,7263	1,6006
120	2,4721	2,3363	2,1915	2,0346	1,9500	1,8600	1,7628	1,0557	1,5530	1,3805
$\infty$	2,3209	2,1848	2,0385	1,8783	1,7908	1,6964	1,5923	1,4730	1,3246	1,0000

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Test Kolmogorov-Smirnov, valores críticos para una muestra**

<i>Tamaño muestral n</i>	<i>Nivel de significación α</i>			
	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,95000	0,97500	0,99000	0,99500
2	0,77639	0,84189	0,90000	0,92929
3	0,63604	0,70760	0,78456	0,82900
4	0,56522	0,62394	0,68887	0,73424
5	0,50945	0,56328	0,62718	0,66853
6	0,46799	0,51926	0,57741	0,61661
7	0,43607	0,48342	0,53844	0,57581
8	0,40962	0,45427	0,50654	0,54179
9	0,38746	0,43001	0,47960	0,51332
10	0,36866	0,40925	0,45662	0,48893
11	0,35242	0,39122	0,43670	0,46770
12	0,33815	0,37543	0,41918	0,44905
13	0,32549	0,36143	0,40362	0,43247
14	0,31417	0,34890	0,38970	0,41762
15	0,30397	0,33760	0,37713	0,40420
16	0,29472	0,32733	0,36571	0,39201
17	0,28627	0,31796	0,35528	0,38086
18	0,27851	0,30936	0,34569	0,37062
19	0,27136	0,30143	0,33685	0,36117
20	0,26473	0,29408	0,32866	0,35241
21	0,25858	0,28724	0,32104	0,34427
22	0,25283	0,28087	0,31394	0,33666
23	0,24746	0,27490	0,30728	0,32954
24	0,24242	0,26931	0,30104	0,32286
25	0,23768	0,26404	0,29516	0,31657
26	0,23320	0,25907	0,28962	0,31064
27	0,22898	0,25438	0,28438	0,30502
28	0,22497	0,24993	0,27942	0,29971
29	0,22117	0,24571	0,27471	0,29466
30	0,21756	0,24170	0,27023	0,28987

Para tamaños muestrales  $n > 30$ , el valor crítico  $D = \sqrt{-\ln(\alpha/2)/2n}$

Cuando  $\alpha = 0,05$   $D = 1,358/\sqrt{n}$ , para  $\alpha = 0,01$   $D = 1,628/\sqrt{n}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Valores críticos del test de Kolmogorov-Smirnov para una muestra**
**valores críticos  $D_\alpha$  del test de Kolmogorov-Smirnov**

$$D_n = \max_x |F_n(x) - F_0(x)| \quad P(D_n > D_\alpha) = \alpha$$

Tamaño de muestra	Test unilateral, $\alpha = 0,10$ Test bilateral, $\alpha = 0,20$	0,05 0,10	0,025 0,050	0,01 0,02	0,005 0,010
$n = 1$	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
8	0,358	0,410	0,454	0,507	0,542
9	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513
10	0,323	0,369	0,409	0,457	0,489
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
12	0,296	0,338	0,375	0,419	0,449
13	0,285	0,325	0,361	0,404	0,432
14	0,275	0,314	0,349	0,390	0,418
15	0,266	0,304	0,338	0,377	0,404
16	0,258	0,295	0,327	0,366	0,392
17	0,250	0,286	0,318	0,355	0,381
18	0,244	0,279	0,309	0,346	0,371
19	0,237	0,271	0,301	0,337	0,361
20	0,232	0,265	0,294	0,329	0,352
21	0,226	0,259	0,287	0,321	0,344
22	0,221	0,253	0,281	0,314	0,337
23	0,216	0,247	0,275	0,307	0,330
24	0,212	0,242	0,269	0,301	0,323
25	0,208	0,238	0,264	0,295	0,317
26	0,204	0,233	0,259	0,290	0,311
27	0,200	0,229	0,254	0,284	0,305
28	0,197	0,225	0,250	0,279	0,300
29	0,193	0,221	0,246	0,275	0,295
30	0,190	0,218	0,242	0,270	0,290
31	0,187	0,214	0,238	0,266	0,285
32	0,184	0,211	0,234	0,262	0,281
33	0,182	0,208	0,231	0,258	0,277
34	0,179	0,205	0,227	0,254	0,273
35	0,177	0,202	0,224	0,251	0,269
36	0,174	0,199	0,221	0,247	0,265
37	0,172	0,196	0,218	0,244	0,262
38	0,170	0,194	0,215	0,241	0,258
39	0,168	0,191	0,213	0,238	0,255
40	0,165	0,189	0,210	0,235	0,252
Aproximación para $n > 40$ :	1,0730	1,2239	1,3581	1,5174	1,6276
	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Valores críticos del test de Lilliefors de normalidad**

 valores críticos  $D_\alpha$  del estadístico:

$$D_n = \max_x |F_n(x) - F_0(x)| \quad P(D_n > D_\alpha) = \alpha$$

Tamaño de muestra <i>n</i>	Nivel de significación $\alpha$				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
4	0,300	0,319	0,352	0,381	0,417
5	0,285	0,299	0,315	0,337	0,405
6	0,265	0,277	0,294	0,319	0,364
7	0,247	0,258	0,276	0,300	0,348
8	0,233	0,244	0,261	0,285	0,331
9	0,223	0,233	0,249	0,271	0,311
10	0,215	0,224	0,239	0,258	0,294
11	0,206	0,217	0,230	0,249	0,284
12	0,199	0,212	0,223	0,242	0,275
13	0,190	0,202	0,214	0,234	0,268
14	0,183	0,194	0,207	0,227	0,261
15	0,177	0,187	0,201	0,220	0,257
16	0,173	0,182	0,195	0,213	0,250
17	0,169	0,177	0,189	0,206	0,245
18	0,166	0,173	0,184	0,200	0,239
19	0,163	0,169	0,179	0,195	0,235
20	0,160	0,166	0,174	0,190	0,231
25	0,149	0,153	0,165	0,180	0,203
30	0,131	0,136	0,144	0,161	0,187
Aproximación para <i>n</i> > 30	0,736	0,768	0,805	0,886	1,031
	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Coefficientes $a_i$ del test W de Shapiro-Wilk de normalidad

valores de los coeficientes  $a_i$  del estadístico de Shapiro-Wilk de normalidad:

$$W = \frac{\left[ \sum_{i=1}^k a_i (X_{(n-i+1)} - X_{(i)}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$i \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739
2		0,0000	0,1667	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291
3			0,0000	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	
4				0,0000	0,0561	0,0947	0,1224		
5					0,0000	0,0399			

$i \backslash n$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734
2	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211
3	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565
4	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085
5	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686
6	0,0000	0,0303	0,0539	0,0727	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334
7			0,0000	0,0240	0,0433	0,0593	0,0725	0,0837	0,0932	0,1013
8				0,0000	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711	
9					0,0000	0,0163	0,0303	0,0422		
10						0,0000	0,0140			

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Coeficientes $a_i$ del test W de Shapiro-Wilk de normalidad

valores de los coeficientes  $a_i$  del estadístico de Shapiro-Wilk de normalidad:

$$W = \frac{\left[ \sum_{i=1}^k a_i (X_{(n-i+1)} - \bar{X}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$i \backslash n$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,4643	0,4590	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487
4	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148
5	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870
6	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	0,1092	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,0530	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036
10	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11	0,0000	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12				0,0107	0,0200	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13					0,0094	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381	
14						0,0000	0,0084	0,0159	0,0227	
15							0,0000	0,0076		

$i \backslash n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0,4220	0,4188	0,4156	0,4127	0,4096	0,4068	0,4040	0,4015	0,3989	0,3964
2	0,2921	0,2898	0,2876	0,2854	0,2834	0,2813	0,2794	0,2774	0,2755	0,2737
3	0,2475	0,2462	0,2451	0,2439	0,2427	0,2415	0,2403	0,2391	0,2380	0,2368
4	0,2145	0,2141	0,2137	0,2132	0,2127	0,2121	0,2116	0,2110	0,2104	0,2098
5	0,1874	0,1878	0,1880	0,1882	0,1883	0,1883	0,1883	0,1881	0,1880	0,1878
6	0,1641	0,1651	0,1660	0,1667	0,1673	0,1678	0,1683	0,1686	0,1689	0,1691
7	0,1433	0,1449	0,1463	0,1475	0,1487	0,1496	0,1505	0,1513	0,1520	0,1526
8	0,1243	0,1265	0,1284	0,1301	0,1317	0,1331	0,1344	0,1356	0,1366	0,1376
9	0,1066	0,1093	0,1118	0,1140	0,1160	0,1179	0,1196	0,1211	0,1225	0,1237
10	0,0899	0,0931	0,0961	0,0988	0,1013	0,1036	0,1056	0,1075	0,1092	0,1108
11	0,0739	0,0777	0,0812	0,0844	0,0873	0,0900	0,0924	0,0947	0,0967	0,0986
12	0,0585	0,0629	0,0669	0,0706	0,0739	0,0770	0,0798	0,0824	0,0848	0,0870
13	0,0435	0,0485	0,0530	0,0572	0,0610	0,0645	0,0677	0,0706	0,0733	0,0759
14	0,0289	0,0344	0,0395	0,0441	0,0484	0,0523	0,0559	0,0592	0,0622	0,0651
15	0,0144	0,0206	0,0262	0,0314	0,0361	0,0404	0,0444	0,0481	0,0515	0,0546
16	0,0000	0,0068	0,0131	0,0187	0,0239	0,0287	0,0331	0,0372	0,0409	0,0444
17				0,0000	0,0062	0,0119	0,0172	0,0220	0,0264	0,0305
18					0,0000	0,0057	0,0110	0,0158	0,0203	0,0244
19						0,0000	0,0053	0,0101	0,0146	
20							0,0000	0,0049		

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Coefficients $a_i$ del test W de Shapiro-Wilk de normalidad

valores de los coeficientes  $a_i$  del estadístico de Shapiro-Wilk de normalidad:

$$W = \frac{\left[ \sum_{i=1}^k a_i (X_{(n-i+1)} - X_{(i)}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$i \backslash n$	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0,3904	0,3917	0,3894	0,3872	0,3850	0,3830	0,3808	0,3789	0,3770	0,3751
2	0,2719	0,2701	0,2684	0,2667	0,2651	0,2635	0,2620	0,2604	0,2589	0,2574
3	0,2357	0,2345	0,2334	0,2323	0,2313	0,2302	0,2291	0,2281	0,2271	0,2260
4	0,2091	0,2085	0,2078	0,2072	0,2065	0,2058	0,2052	0,2045	0,2038	0,2032
5	0,1876	0,1874	0,1871	0,1868	0,1865	0,1862	0,1859	0,1855	0,1851	0,1847
6	0,1693	0,1694	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1693	0,1692	0,1691
7	0,1531	0,1535	0,1539	0,1542	0,1545	0,1548	0,1550	0,1551	0,1553	0,1554
8	0,1384	0,1392	0,1398	0,1405	0,1410	0,1415	0,1420	0,1423	0,1427	0,1430
9	0,1249	0,1259	0,1269	0,1278	0,1286	0,1293	0,1300	0,1306	0,1312	0,1317
10	0,1123	0,1136	0,1149	0,1160	0,1170	0,1180	0,1189	0,1197	0,1205	0,1212
11	0,1004	0,1020	0,1035	0,1049	0,1062	0,1073	0,1085	0,1095	0,1105	0,1113
12	0,0891	0,0909	0,0927	0,0943	0,0959	0,0972	0,0986	0,0998	0,1010	0,1020
13	0,0782	0,0804	0,0824	0,0842	0,0860	0,0876	0,0892	0,0906	0,0919	0,0932
14	0,0677	0,0701	0,0724	0,0745	0,0765	0,0783	0,0801	0,0817	0,0832	0,0846
15	0,0575	0,0602	0,0628	0,0651	0,0673	0,0694	0,0713	0,0731	0,0748	0,0764
16	0,0476	0,0506	0,0534	0,0560	0,0584	0,0607	0,0628	0,0648	0,0667	0,0685
17	0,0379	0,0411	0,0442	0,0471	0,0497	0,0522	0,0546	0,0568	0,0588	0,0608
18	0,0283	0,0318	0,0352	0,0383	0,0412	0,0439	0,0465	0,0489	0,0511	0,0532
19	0,0188	0,0227	0,0263	0,0296	0,0328	0,0357	0,0385	0,0411	0,0436	0,0459
20	0,0094	0,0136	0,0175	0,0211	0,0245	0,0277	0,0307	0,0335	0,0361	0,0386
21	0,0000	0,0045	0,0087	0,0126	0,0163	0,0197	0,0229	0,0259	0,0288	0,0314
22			0,0000	0,0042	0,0081	0,0118	0,0153	0,0185	0,0215	0,0244
23				0,0000	0,0039	0,0076	0,0110	0,0143	0,0174	
24					0,0000	0,0037	0,0071	0,0104		
25						0,0000	0,0035			

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Valores críticos del test W de Shapiro-Wilk de normalidad

valores críticos  $W_\alpha$  del test W de Shapiro-Wilk:  $P[W < W_\alpha] = \alpha$

<i>n</i>	Nivel de significación $\alpha$								
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,98	0,99
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959	0,998	0,999	1,000	1,000
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	0,987	0,992	0,996	0,997
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	0,979	0,986	0,991	0,993
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	0,974	0,981	0,986	0,989
7	0,730	0,760	0,803	0,838	0,928	0,972	0,979	0,985	0,988
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	0,972	0,978	0,984	0,987
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	0,972	0,978	0,984	0,986
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	0,972	0,978	0,983	0,986
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940	0,973	0,979	0,984	0,986
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943	0,973	0,979	0,984	0,986
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945	0,974	0,979	0,984	0,986
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,947	0,975	0,980	0,984	0,986
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,950	0,975	0,980	0,984	0,987
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952	0,976	0,981	0,985	0,987
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954	0,977	0,981	0,985	0,987
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956	0,978	0,982	0,986	0,988
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957	0,978	0,982	0,986	0,988
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959	0,979	0,983	0,986	0,988
21	0,873	0,888	0,908	0,923	0,960	0,980	0,983	0,987	0,989
22	0,878	0,892	0,911	0,926	0,961	0,980	0,984	0,987	0,989
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962	0,981	0,984	0,987	0,989
24	0,884	0,898	0,916	0,930	0,963	0,981	0,984	0,987	0,989
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964	0,981	0,985	0,988	0,989
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965	0,982	0,985	0,988	0,989
27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965	0,982	0,985	0,988	0,990
28	0,896	0,908	0,924	0,936	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
29	0,898	0,910	0,926	0,937	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967	0,983	0,985	0,988	0,990
31	0,902	0,914	0,929	0,940	0,967	0,983	0,986	0,988	0,990
32	0,904	0,915	0,930	0,941	0,968	0,983	0,986	0,988	0,990
33	0,906	0,917	0,931	0,942	0,968	0,983	0,986	0,989	0,990
34	0,908	0,919	0,933	0,943	0,969	0,983	0,986	0,989	0,990
35	0,910	0,920	0,934	0,944	0,969	0,984	0,986	0,989	0,990
36	0,912	0,922	0,935	0,945	0,970	0,984	0,986	0,989	0,990
37	0,914	0,924	0,936	0,946	0,970	0,984	0,987	0,989	0,990
38	0,916	0,925	0,938	0,947	0,971	0,984	0,987	0,989	0,991
39	0,917	0,927	0,939	0,948	0,971	0,984	0,987	0,989	0,991
40	0,919	0,928	0,940	0,949	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
41	0,920	0,929	0,941	0,950	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
42	0,922	0,930	0,942	0,951	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
43	0,923	0,932	0,943	0,951	0,973	0,985	0,987	0,990	0,991
44	0,924	0,933	0,944	0,952	0,973	0,985	0,987	0,990	0,991
45	0,926	0,934	0,945	0,953	0,973	0,985	0,988	0,990	0,991
46	0,927	0,935	0,945	0,953	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
47	0,928	0,936	0,946	0,954	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
48	0,929	0,937	0,947	0,954	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
49	0,929	0,937	0,947	0,955	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
50	0,930	0,938	0,947	0,955	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Valores críticos del test de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras de distintos tamaños  $n_1 \neq n_2$**   
**valores críticos  $D_{n_1, n_2; \alpha}$  del test de Kolmogorov-Smirnov:**

$$D_{n_1, n_2} = \max_x |F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)| \quad P(D_{n_1, n_2} > D_{n_1, n_2; \alpha}) = \alpha$$

$$N_1 = \min(n_1, n_2)$$

$$N_2 = \max(n_1, n_2)$$

Test unilateral Test bilateral		Nivel de significación $\alpha$				
		$\alpha = 0,10$ $\alpha = 0,20$	0,05 0,10	0,025 0,050	0,01 0,02	0,005 0,01
$N_1 = 6$	$N_2 = 7$	23/42 1/2 9	4/7 7/12 5/9	29/42 2/3 2/3	5/7 3/4 13/18	5/6 3/4 7/9
	10	1/2	17/30	19/30	7/10	11/15
	12	1/2	7/12	7/12	2/3	3/4
	18	4/9	5/9	11/18	2/3	13/18
	24	11/24	1/2	7/12	5/8	2/3
$N_1 = 7$	$N_2 = 8$	27/56 31/63 10	33/56 5/9 39/70	5/8 40/63 43/70	41/56 5/7 7/10	3/4 47/63 5/7
	14	3/7	1/2	4/7	9/14	5/7
	28	3/7	13/28	15/28	17/28	9/14
$N_1 = 8$	$N_2 = 9$	4/9 10	13/24 21/40	5/8 23/40	2/3 27/40	3/4 7/10
	12	11/24	1/2	7/12	5/8	2/3
	16	7/16	1/2	9/16	5/8	5/8
	32	13/32	7/16	1/2	9/16	19/32
$N_1 = 9$	$N_2 = 10$	7/15 4/9 15	1/2 1/2 22/45	26/45 5/9 8/15	2/3 11/18 3/5	31/45 2/3 29/45
	18	7/18	4/9	1/2	5/9	11/18
	36	13/36	5/12	17/36	19/36	5/9
$N_1 = 10$	$N_2 = 15$	2/5 2/5 40	7/15 9/20 2/5	1/2 1/2 9/20	17/30 11/20 1/2	19/30 3/5
$N_1 = 12$	$N_2 = 15$	23/60 3/8 18	9/20 7/16 5/12	1/2 23/48 17/36	11/20 13/24 19/36	7/12 7/12 5/9
	20	11/30	5/12	7/15	31/60	17/30
$N_1 = 15$	$N_2 = 20$	7/20	2/5	13/30	29/60	31/60
$N_1 = 16$	$N_2 = 20$	27/80	31/80	17/40	19/40	41/80
Aproximación para $n_1$ y $n_2$ grandes		$\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \times 1,0730$		1,2239	1,3581	1,5174
						1,6276

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Valores críticos del test de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras  
del mismo tamaño,  $n_1 = n_2 = n$**

valores críticos  $D_{n,n:\alpha}$  del test de Kolmogorov-Smirnov:

$$D_{n,n} = \max_x |F_n(x) - G_n(x)| \quad P(D_{n,n} > D_{n,n;\alpha}) = \alpha$$

Tamaño de muestras	Test unilateral Test bilateral	Nivel de significación				
		0,10 0,20	0,05 0,10	0,025 0,050	0,01 0,02	0,005 0,010
n = 3		2/3	2/3			
4		3/4	3/4	3/4		
5		3/5	3/5	4/5	4/5	4/5
6		3/6	4/6	4/6	5/6	5/6
7		4/7	4/7	5/7	5/7	5/7
8		4/8	4/8	5/8	5/8	6/8
9		4/9	5/9	5/9	6/9	6/9
10		4/10	5/10	6/10	6/10	7/10
11		5/11	5/11	6/11	7/11	7/11
12		5/12	5/12	6/12	7/12	7/12
13		5/13	6/13	6/13	7/13	8/13
14		5/14	6/14	7/14	7/14	8/14
15		5/15	6/15	7/15	8/15	8/15
16		6/16	6/16	7/16	8/16	9/16
17		6/17	7/17	7/17	8/17	9/17
18		6/18	7/18	8/18	9/18	9/18
19		6/19	7/19	8/19	9/19	9/19
20		6/29	7/20	8/20	9/20	10/20
21		6/21	7/21	8/21	9/21	10/21
22		7/22	8/22	8/22	10/22	10/22
23		7/23	8/23	9/23	10/23	10/23
24		7/24	8/24	9/24	10/24	11/24
25		7/25	8/25	9/25	10/25	11/25
26		7/26	8/26	9/26	10/26	11/26
27		7/27	8/27	9/27	11/27	11/27
28		8/28	9/28	10/28	11/28	12/28
29		8/29	9/29	10/29	11/29	12/29
30		8/30	9/30	10/30	11/30	12/30
31		8/31	9/31	10/31	11/31	12/31
32		8/32	9/32	10/32	12/32	12/32
33		8/33	9/33	11/33	12/33	13/33
34		8/34	10/34	11/34	12/34	13/34
35		8/35	10/35	11/35	12/35	13/35
36		9/36	10/36	11/36	12/36	13/36
37		9/37	10/37	11/37	12/37	13/37
38		9/38	10/38	11/38	13/38	14/38
39		9/39	10/39	11/39	13/39	14/39
40		9/40	10/40	12/40	13/40	14/40
	Aproximación para $n > 40$ :	$\frac{1,5174}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,7308}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,9206}{\sqrt{n}}$	$\frac{2,1460}{\sqrt{n}}$	$\frac{2,3018}{\sqrt{n}}$

**Distribución de probabilidades para el test de rachas de aleatoriedad**  
 función de distribución del número total de rachas  $R$

$P(R \leq r)$  en una muestra de tamaño  $n = n_1 + n_2$  para el test de rachas de aleatoriedad de Wald-Wolfowitz

$n_1$	$n_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		$r$																		
2	3	0,2000	0,5000	0,9000	1,0000															
2	4	0,1333	0,4000	0,8000	1,0000															
2	5	0,0952	0,3333	0,7143	1,0000															
2	6	0,0714	0,2857	0,6429	1,0000															
2	7	0,0556	0,2500	0,5833	1,0000															
2	8	0,0444	0,2222	0,5333	1,0000															
2	9	0,0364	0,2000	0,4909	1,0000															
2	10	0,0303	0,1818	0,4545	1,0000															
3	3	0,1000	0,3000	0,7000	0,9000	1,0000														
3	4	0,0571	0,2000	0,5429	0,8000	0,9714	1,0000													
3	5	0,0357	0,1429	0,4286	0,7143	0,9286	1,0000													
3	6	0,0238	0,1071	0,3452	0,6429	0,8810	1,0000													
3	7	0,0167	0,0833	0,2833	0,5833	0,8333	1,0000													
3	8	0,0121	0,0667	0,2364	0,5333	0,7879	1,0000													
3	9	0,0091	0,0545	0,2000	0,4909	0,7454	1,0000													
3	10	0,0070	0,0454	0,1713	0,4545	0,7063	1,0000													
4	4	0,0286	0,1143	0,3714	0,6286	0,8857	0,9714	1,0000												
4	5	0,0159	0,0714	0,2619	0,5000	0,7857	0,9286	0,9921	1,0000											
4	6	0,0095	0,0476	0,1905	0,4048	0,6905	0,8810	0,9762	1,0000											
4	7	0,0061	0,0333	0,1424	0,3333	0,6061	0,8333	0,9545	1,0000											
4	8	0,0040	0,0242	0,1091	0,2788	0,5333	0,7879	0,9293	1,0000											
4	9	0,0028	0,0182	0,0853	0,2364	0,4713	0,7454	0,9021	1,0000											
4	10	0,0020	0,0140	0,0679	0,2028	0,4186	0,7063	0,8741	1,0000											

**Distribución de probabilidades para el test de rachas de aleatoriedad**  
**función de distribución del número total de rachas  $R$**

$P(R \leq r)$  en una muestra de tamaño  $n = n_1 + n_2$  para el test de rachas de aleatoriedad de Wald-Wolfowitz

$n_1$	$n_2$	$r$																				
			2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
5	5	0,0079	0,0397	0,1667	0,3571	0,6429	0,8333	0,9603	0,9921	1,0000												
5	6	0,0043	0,0238	0,1104	0,2619	0,5216	0,7381	0,9112	0,9762	0,9978	1,0000											
5	7	0,0025	0,0152	0,0758	0,1970	0,4242	0,6515	0,8535	0,9545	0,9924	1,0000											
5	8	0,0016	0,0101	0,0536	0,1515	0,3473	0,5758	0,7933	0,9293	0,9837	1,0000											
5	9	0,0010	0,0070	0,0390	0,1189	0,2867	0,5105	0,7343	0,9021	0,9720	1,0000											
5	10	0,0007	0,0050	0,0290	0,0949	0,2388	0,4545	0,6783	0,8741	0,9580	1,0000											
6	6	0,0022	0,0130	0,0671	0,1753	0,3918	0,6082	0,8247	0,9329	0,9870	0,9978	1,0000										
6	7	0,0012	0,0076	0,0425	0,1212	0,2960	0,5000	0,7331	0,8788	0,9662	0,9924	0,9994	1,0000									
6	8	0,0007	0,0047	0,0280	0,0862	0,2261	0,4126	0,6457	0,8205	0,9371	0,9837	0,9977	1,0000									
6	9	0,0004	0,0030	0,0190	0,0629	0,1748	0,3427	0,5664	0,7622	0,9021	0,9720	0,9944	1,0000									
6	10	0,0003	0,0020	0,0132	0,0470	0,1369	0,2867	0,4965	0,7063	0,8636	0,9580	0,9895	1,0000									
7	7	0,0006	0,0041	0,0251	0,0775	0,2086	0,3834	0,6166	0,7914	0,9225	0,9749	0,9959	0,9994	1,0000								
7	8	0,0003	0,0023	0,0154	0,0513	0,1492	0,2960	0,5136	0,7040	0,8671	0,9487	0,9879	0,9977	0,9998	1,0000							
7	9	0,0002	0,0014	0,0098	0,0350	0,1084	0,2308	0,4266	0,6224	0,8059	0,9161	0,9748	0,9944	0,9993	1,0000							
7	10	0,0001	0,0009	0,0064	0,0245	0,0800	0,1818	0,3546	0,5490	0,7433	0,8794	0,9571	0,9895	0,9981	1,0000							
8	8	0,0002	0,0012	0,0089	0,0317	0,1002	0,2144	0,4048	0,5952	0,7855	0,8998	0,9683	0,9911	0,9988	0,9998	1,0000						
8	9	0,0001	0,0007	0,0053	0,0203	0,0687	0,1573	0,3186	0,5000	0,7016	0,8427	0,9394	0,9797	0,9958	0,9993	0,9996	1,0000					
8	10	0,0000	0,0004	0,0033	0,0134	0,0479	0,1170	0,2514	0,4194	0,6209	0,7822	0,9031	0,9636	0,9905	0,9981	0,9979	1,0000					
9	9	0,0000	0,0004	0,0030	0,0122	0,0445	0,1090	0,2380	0,3992	0,6008	0,7620	0,8910	0,9555	0,9878	0,9970	0,9997	0,9996	1,0000				
9	10	0,0000	0,0002	0,0018	0,0076	0,0294	0,0767	0,1786	0,3186	0,5095	0,6814	0,8342	0,9233	0,9742	0,9924	0,9986	0,9998	0,9999	1,0000			
10	10	0,0000	0,0001	0,0010	0,0045	0,0185	0,0513	0,1276	0,2422	0,4141	0,5859	0,7578	0,8724	0,9487	0,9815	0,9955	0,9990	0,9999	0,9999	1,0000		

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Valores críticos de la prueba de rachas nivel de significación del 5%

$$P[R \leq k_1 / H_0] = 0,25 \quad P[R \geq k_2 / H_0] = 0,25$$

$n_1$	$n_2$																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2 K <sub>2</sub>																				
K <sub>1</sub>																				
3 K <sub>2</sub>																				
K <sub>1</sub>																				
4 K <sub>2</sub>				9	9															
K <sub>1</sub>				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	
5 K <sub>2</sub>				9	10	10	11	11												
K <sub>1</sub>				2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	
6 K <sub>2</sub>				9	10	11	12	12	13	13	13	13								
K <sub>1</sub>				2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	
7 K <sub>2</sub>					11	12	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15				
K <sub>1</sub>					2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	
8 K <sub>2</sub>					11	12	13	14	14	15	15	15	16	16	16	16	17	17	17	
K <sub>1</sub>					2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	
9 K <sub>2</sub>						13	14	14	15	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	
K <sub>1</sub>						2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	8	
10 K <sub>2</sub>						13	14	15	16	16	17	17	17	18	18	19	19	19	20	
K <sub>1</sub>						2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	9	
11 K <sub>2</sub>						13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	21	
K <sub>1</sub>						2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	
12 K <sub>2</sub>						13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	22	
K <sub>1</sub>						2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10	
13 K <sub>2</sub>							15	16	17	18	19	19	20	20	20	21	21	22		
K <sub>1</sub>							2	2	3	4	5	6	6	7	7	8	9	10	10	
14 K <sub>2</sub>							15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	24	
K <sub>1</sub>							2	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	10	11	
15 K <sub>2</sub>								15	16	18	18	19	20	21	22	22	23	23	24	
K <sub>1</sub>								2	3	3	4	5	6	6	7	8	9	10	11	
16 K <sub>2</sub>									17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	
K <sub>1</sub>									2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	
17 K <sub>2</sub>									17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	26	
K <sub>1</sub>									2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	
18 K <sub>2</sub>										17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
K <sub>1</sub>										2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	
19 K <sub>2</sub>											17	18	20	21	22	23	23	24	25	26
K <sub>1</sub>											2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
20 K <sub>2</sub>												17	18	20	21	22	23	24	25	26
K <sub>1</sub>												2	3	4	5	6	7	8	9	10

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Función de distribución del estadístico  $U$  de Mann-Whitney**

$$P(U \leq U_0) = \alpha \quad \text{para} \quad n_1 \leq n_2 \quad \text{y} \quad n_2 = 3, \dots, 10$$

		$n_2 = 3$		
$U_0$		$n_1$		
		1	2	3
0		0,25	0,10	0,05
1		0,50	0,20	0,10
2			0,40	0,20
3			0,60	0,35
4				0,50

		$n_2 = 4$			
$U_0$		$n_1$			
		1	2	3	4
0		0,2000	0,0667	0,0286	0,0143
1		0,4000	0,1333	0,0571	0,0286
2		0,6000	0,2667	0,1143	0,0571
3			0,4000	0,2000	0,1000
4			0,6000	0,3143	0,1714
5				0,4286	0,2429
6				0,5714	0,3429
7					0,4429
8					0,5571

		$n_2 = 5$				
$U_0$		$n_1$				
		1	2	3	4	5
0		0,1667	0,0476	0,0179	0,0079	0,0040
1		0,3333	0,0952	0,0357	0,0159	0,0079
2		0,5000	0,1905	0,0714	0,0317	0,0159
3			0,2857	0,1250	0,0556	0,0278
4			0,4286	0,1964	0,0952	0,0476
5			0,5714	0,2857	0,1429	0,0754
6				0,3929	0,2063	0,1111
7				0,5000	0,2778	0,1548
8					0,3651	0,2103
9					0,4524	0,2738
10					0,5476	0,3452
11						0,4206
12						0,5000

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Función de distribución del estadístico  $U$  de Mann-Whitney**

$$P(U \leq U_0) = \alpha \quad \text{para} \quad n_1 \leq n_2 \quad \text{y} \quad n_2 = 3, \dots, 10$$

 $n_2 = 6$ 

$U_0$	$n_1$					
	1	2	3	4	5	6
0	0,1429	0,0357	0,0119	0,0048	0,0022	0,0011
1	0,2857	0,0714	0,0238	0,0095	0,0043	0,0022
2	0,4286	0,1429	0,0476	0,0190	0,0087	0,0043
3	0,5714	0,2143	0,0833	0,0333	0,0152	0,0076
4		0,3214	0,1310	0,0571	0,0260	0,0130
5		0,4286	0,1905	0,0857	0,0411	0,0206
6		0,5714	0,2738	0,1286	0,0628	0,0325
7			0,3571	0,1762	0,0887	0,0465
8			0,4524	0,2381	0,1234	0,0660
9			0,5476	0,3048	0,1645	0,0898
10				0,3810	0,2143	0,1201
11				0,4571	0,2684	0,1548
12				0,5429	0,3312	0,1970
13					0,3961	0,2424
14					0,4654	0,2944
15					0,5346	0,3496
16						0,4091
17						0,4686
18						0,5314

 $n_2 = 7$ 

$U_0$	$n_1$						
	1	2	3	4	5	6	7
0	0,1250	0,0278	0,0083	0,0030	0,0013	0,0006	0,0003
1	0,2500	0,0556	0,0167	0,0061	0,0025	0,0012	0,0006
2	0,3750	0,1111	0,0333	0,0121	0,0051	0,0023	0,0012
3	0,5000	0,1667	0,0583	0,0212	0,0088	0,0041	0,0020
4		0,2500	0,0917	0,0364	0,0152	0,0070	0,0035
5		0,3333	0,1333	0,0545	0,0240	0,0111	0,0055
6		0,4444	0,1917	0,0818	0,0366	0,0175	0,0087
7		0,5556	0,2583	0,1152	0,0530	0,0256	0,0131
8			0,3333	0,1576	0,0745	0,0367	0,0189
9			0,4167	0,2061	0,1010	0,0507	0,0265
10			0,5000	0,2636	0,1338	0,0688	0,0364
11				0,3242	0,1717	0,0903	0,0487
12				0,3939	0,2159	0,1171	0,0641
13				0,4636	0,2652	0,1474	0,0825
14				0,5364	0,3194	0,1830	0,1043
15					0,3775	0,2226	0,1297
16					0,4381	0,2669	0,1588
17					0,5000	0,3141	0,1914
18						0,3654	0,2279
19						0,4178	0,2675
20						0,4726	0,3100
21						0,5274	0,3552
22							0,4024
23							0,4508
24							0,5000

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Función de distribución del estadístico $U$ de Mann-Whitney

$$P(U \leq U_0) = \alpha \quad \text{para} \quad n_1 \leq n_2 \quad \text{y} \quad n_2 = 3, \dots, 10$$

$n_2 = 8$

$U_0$	$n_1$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,1111	0,0222	0,0061	0,0020	0,0008	0,0003	0,0002	0,0001
1	0,2222	0,0444	0,0121	0,0040	0,0016	0,0007	0,0003	0,0002
2	0,3333	0,0889	0,0242	0,0081	0,0031	0,0013	0,0006	0,0003
3	0,4444	0,1333	0,0424	0,0141	0,0054	0,0023	0,0011	0,0005
4	0,5556	0,2000	0,0667	0,0242	0,0093	0,0040	0,0019	0,0009
5		0,2667	0,0970	0,0364	0,0148	0,0063	0,0030	0,0015
6		0,3556	0,1394	0,0545	0,0225	0,0100	0,0047	0,0023
7		0,4444	0,1879	0,0768	0,0326	0,0147	0,0070	0,0035
8		0,5556	0,2485	0,1071	0,0466	0,0213	0,0103	0,0052
9			0,3152	0,1414	0,0637	0,0296	0,0145	0,0074
10			0,3879	0,1838	0,0855	0,0406	0,0200	0,0103
11			0,4606	0,2303	0,1111	0,0539	0,0270	0,0141
12			0,5394	0,2848	0,1422	0,0709	0,0361	0,0190
13				0,3414	0,1772	0,0906	0,0469	0,0249
14				0,4040	0,2176	0,1142	0,0603	0,0325
15				0,4667	0,2618	0,1412	0,0760	0,0415
16				0,5333	0,3108	0,1725	0,0946	0,0524
17					0,3621	0,2068	0,1159	0,0652
18					0,4165	0,2454	0,1405	0,0803
19					0,4716	0,2864	0,1678	0,0974
20					0,5284	0,3310	0,1984	0,1172
21						0,3773	0,2317	0,1393
22						0,4259	0,2679	0,1641
23						0,4749	0,3063	0,1911
24						0,5251	0,3472	0,2209
25							0,3894	0,2527
26							0,4333	0,2869
27							0,4775	0,3227
28							0,5225	0,3605
29								0,3992
30								0,4392
31								0,4796
32								0,5204

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Función de distribución del estadístico  $U$  de Mann-Whitney**

$$P(U \leq U_0) = \alpha \quad \text{para} \quad n_1 \leq n_2 \quad \text{y} \quad n_2 = 3, \dots, 10$$

 $n_2 = 9$ 

$U_0$	$n_1$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0,1000	0,0182	0,0045	0,0014	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	
1	0,2000	0,0364	0,0091	0,0028	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	
2	0,3000	0,0727	0,0182	0,0056	0,0020	0,0008	0,0003	0,0002	0,0001	
3	0,4000	0,1091	0,0318	0,0098	0,0035	0,0014	0,0006	0,0003	0,0001	
4	0,5000	0,1636	0,0500	0,0168	0,0060	0,0024	0,0010	0,0005	0,0002	
5		0,2182	0,0727	0,0252	0,0095	0,0038	0,0017	0,0008	0,0004	
6		0,2909	0,1045	0,0378	0,0145	0,0060	0,0026	0,0012	0,0006	
7		0,3636	0,1409	0,0531	0,0210	0,0088	0,0039	0,0019	0,0009	
8		0,4545	0,1864	0,0741	0,0300	0,0128	0,0058	0,0028	0,0014	
9		0,5455	0,2409	0,0993	0,0415	0,0180	0,0082	0,0039	0,0020	
10			0,3000	0,1301	0,0559	0,0248	0,0115	0,0056	0,0028	
11			0,3636	0,1650	0,0734	0,0332	0,0156	0,0076	0,0039	
12			0,4318	0,2070	0,0949	0,0440	0,0209	0,0103	0,0053	
13			0,5000	0,2517	0,1199	0,0567	0,0274	0,0137	0,0071	
14				0,3021	0,1489	0,0723	0,0356	0,0180	0,0094	
15				0,3552	0,1818	0,0905	0,0454	0,0232	0,0122	
16				0,4126	0,2188	0,1119	0,0571	0,0296	0,0157	
17				0,4699	0,2592	0,1361	0,0708	0,0372	0,0200	
18				0,5301	0,3032	0,1638	0,0869	0,0464	0,0252	
19					0,3497	0,1942	0,1052	0,0570	0,0313	
20					0,3986	0,2280	0,1261	0,0694	0,0385	
21					0,4491	0,2643	0,1496	0,0836	0,0470	
22					0,5000	0,3035	0,1755	0,0998	0,0567	
23						0,3445	0,2039	0,1179	0,0680	
24						0,3878	0,2349	0,1383	0,0807	
25						0,4320	0,2680	0,1606	0,0951	
26						0,4773	0,3032	0,1852	0,1112	
27						0,5227	0,3403	0,2117	0,1290	
28							0,3788	0,2404	0,1487	
29							0,4185	0,2707	0,1701	
30							0,4591	0,3029	0,1933	
31							0,5000	0,3365	0,2181	
32								0,3715	0,2447	
33								0,4074	0,2729	
34								0,4442	0,3024	
35								0,4813	0,3332	
36								0,5187	0,3652	
37									0,3981	
38									0,4317	
39									0,4657	
40									0,5000	

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Función de distribución del estadístico  $U$  de Mann-Whitney**

$$P(U \leq U_0) = \alpha \quad \text{para} \quad n_1 \leq n_2 \quad \text{y} \quad n_2 = 3, \dots, 10$$

$$n_2 = 10$$

$U_0$	$n_1$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,0909	0,0152	0,0035	0,0010	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,1818	0,0303	0,0070	0,0020	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,2727	0,0606	0,0140	0,0040	0,0013	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
3	0,3636	0,0909	0,0245	0,0070	0,0023	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000
4	0,4545	0,1364	0,0385	0,0120	0,0040	0,0015	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001
5	0,5455	0,1818	0,0559	0,0180	0,0063	0,0024	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001
6		0,2424	0,0804	0,0270	0,0097	0,0037	0,0015	0,0007	0,0003	0,0002
7		0,3030	0,1084	0,0380	0,0140	0,0055	0,0023	0,0010	0,0005	0,0002
8		0,3788	0,1434	0,0529	0,0200	0,0080	0,0034	0,0015	0,0007	0,0004
9		0,4545	0,1853	0,0709	0,0276	0,0112	0,0048	0,0022	0,0011	0,0005
10		0,5455	0,2343	0,0939	0,0376	0,0156	0,0068	0,0031	0,0015	0,0008
11			0,2867	0,1199	0,0496	0,0210	0,0093	0,0043	0,0021	0,0010
12			0,3462	0,1518	0,0646	0,0280	0,0125	0,0058	0,0028	0,0014
13			0,4056	0,1868	0,0823	0,0363	0,0165	0,0078	0,0038	0,0019
14			0,4685	0,2268	0,1032	0,0467	0,0215	0,0103	0,0051	0,0026
15			0,5315	0,2697	0,1272	0,0589	0,0277	0,0133	0,0066	0,0034
16				0,3177	0,1548	0,0736	0,0351	0,0171	0,0086	0,0045
17				0,3666	0,1855	0,0903	0,0439	0,0217	0,0110	0,0057
18				0,4196	0,2198	0,1099	0,0544	0,0273	0,0140	0,0073
19				0,4725	0,2567	0,1317	0,0665	0,0338	0,0175	0,0093
20				0,5275	0,2970	0,1566	0,0806	0,0416	0,0217	0,0116
21					0,3393	0,1838	0,0966	0,0506	0,0267	0,0144
22					0,3839	0,2139	0,1148	0,0610	0,0326	0,0177
23					0,4296	0,2461	0,1349	0,0729	0,0394	0,0216
24					0,4765	0,2811	0,1574	0,0864	0,0474	0,0262
25					0,5235	0,3177	0,1819	0,1015	0,0564	0,0315
26						0,3564	0,2087	0,1185	0,0667	0,0376
27						0,3962	0,2374	0,1371	0,0782	0,0446
28						0,4374	0,2681	0,1577	0,0912	0,0526
29						0,4789	0,3004	0,1800	0,1055	0,0615
30						0,5211	0,3345	0,2041	0,1214	0,0716
31							0,3698	0,2299	0,1388	0,0827
32							0,4063	0,2574	0,1577	0,0952
33							0,4434	0,2863	0,1781	0,1088
34							0,4811	0,3167	0,2001	0,1237
35							0,5189	0,3482	0,2235	0,1399
36								0,3809	0,2483	0,1575
37								0,4143	0,2745	0,1763
38								0,4484	0,3019	0,1965
39								0,4827	0,3304	0,2179
40								0,5173	0,3598	0,2406
41									0,3901	0,2644
42									0,4211	0,2894
43									0,4524	0,3153
44									0,4841	0,3421
45									0,5159	0,3697
46										0,3980
47										0,4267
48										0,4559
49										0,4853
50										0,5147

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Valores críticos para el test de Kruskal-Wallis para $k = 3$

$$\text{valores críticos } h_\alpha: P(H \geq h_\alpha) = \alpha$$

si el estadístico  $H$  que se calcula a partir de las observaciones muestrales es mayor que  $h_\alpha$ , se rechaza la hipótesis nula  $H_0$  al nivel de significación  $\alpha$

Tamaños de las muestras			$h_\alpha$	$\alpha$	Tamaños de las muestras			$h_\alpha$	$\alpha$
$n_1$	$n_2$	$n_3$			$n_1$	$n_2$	$n_3$		
2	1	1	2,7000	0,500	4	3	2	6,4444	0,008
2	2	1	3,6000	0,200				6,3000	0,011
2	2	2	4,5714	0,067				5,4444	0,046
			3,7143	0,200				5,4000	0,051
3	1	1	3,2000	0,300				4,5111	0,098
3	2	1	4,2857	0,100				4,4444	0,102
			3,8571	0,133	4	3	3	6,7455	0,010
3	2	2	5,3572	0,029				6,7091	0,013
			4,7143	0,048				5,7909	0,046
			4,5000	0,067				5,7273	0,050
			4,4643	0,105				4,7091	0,092
3	3	1	5,1429	0,043				4,7000	0,101
			4,5714	0,100	4	4	1	6,6667	0,010
			4,0000	0,129				6,1667	0,022
3	3	2	6,2500	0,011				4,9667	0,048
			5,3611	0,032				4,8667	0,054
			5,1389	0,061				4,1667	0,082
			4,5556	0,100				4,0667	0,102
			4,2500	0,121	4	4	2	7,0364	0,006
3	3	3	7,2000	0,004				6,8727	0,011
			6,4889	0,011				5,4545	0,046
			5,6889	0,029				5,2364	0,052
			5,6000	0,050				4,5545	0,098
			5,0667	0,086				4,4455	0,103
			4,6222	0,100	4	4	3	7,1439	0,010
4	1	1	3,5714	0,200				7,1364	0,011
4	2	1	4,8214	0,057				5,5985	0,049
			4,5000	0,076				5,5758	0,051
			4,0179	0,114				4,5455	0,099
4	2	2	6,0000	0,014				4,4773	0,102
			5,3333	0,033	4	4	4	7,6538	0,008
			5,1250	0,052				7,5385	0,011
			4,4583	0,100				5,6923	0,049
			4,1667	0,105				5,6538	0,054
4	3	1	5,8333	0,021				4,6539	0,097
			5,2083	0,050				4,5001	0,104
			5,0000	0,057					
			4,0556	0,093					
			3,8889	0,129					

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Valores críticos para el test de Kruskal-Wallis para $k = 3$

$$\text{valores críticos } h_\alpha : P(H \geq h_\alpha) = \alpha$$

si el estadístico  $H$  que se calcula a partir de las observaciones muestrales es mayor que  $h_\alpha$ , se rechaza la hipótesis nula  $H_0$  al nivel de significación  $\alpha$

Tamaños de las muestras			$h_\alpha$	$\alpha$	Tamaños de las muestras			$h_\alpha$	$\alpha$
$n_1$	$n_2$	$n_3$			$n_1$	$n_2$	$n_3$		
5	5	1	3,8571	0,143	5	4	3	7,4449	0,010
		2	5,2500	0,036				7,3949	0,011
			5,0000	0,048				5,6564	0,049
			4,4500	0,071				5,6308	0,050
			4,2000	0,095				4,5487	0,099
			4,0500	0,119				4,5231	0,103
		2	6,5333	0,008		5	4	7,7604	0,009
			6,1333	0,013				7,7440	0,011
			5,1600	0,034				5,6571	0,049
			5,0400	0,056				5,6176	0,050
5	5	1	6,4000	0,012	5	5	1	4,6187	0,100
			4,9600	0,048				4,5527	0,102
			4,8711	0,052				7,3091	0,009
			4,0178	0,095				6,8364	0,011
			3,8400	0,123				5,1273	0,046
		2	6,9091	0,009				4,9091	0,053
			6,8218	0,010				4,1091	0,086
			5,2509	0,049				4,0364	0,105
			5,1055	0,052				7,3385	0,010
			4,6509	0,091				7,2692	0,010
5	5	3	4,4945	0,101	5	5	2	5,3385	0,047
		3	7,0788	0,009				5,2462	0,051
			6,9818	0,011				4,6231	0,097
			5,6485	0,049				4,5077	0,100
			5,5152	0,051				7,5780	0,010
			4,5333	0,097				7,5429	0,010
			4,4121	0,109				5,7055	0,046
		1	6,9545	0,008				5,6264	0,051
			6,8400	0,011				4,5451	0,100
			4,9855	0,044				4,5363	0,102
5	5	4	4,8600	0,056	5	5	4	7,8229	0,010
		4	3,9873	0,098				7,7914	0,010
			3,9600	0,102				5,6657	0,049
		2	7,2045	0,009				5,6429	0,050
			7,1182	0,010				4,5229	0,099
			5,2727	0,049				4,5200	0,101
			5,2682	0,050				8,0000	0,009
			4,5409	0,098				7,9800	0,010
			4,5182	0,101				5,7800	0,049
								5,6600	0,051

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Valores críticos para el test de Kruskal-Wallis para diferentes valores de $k$

valores críticos  $h_\alpha$ :  $P(H \geq h_\alpha) = \alpha$

para distintos tamaños muestrales y niveles de significación 0,05 y 0,01

$k = 3$			$k = 4$			$k = 5$		
Tamaños de las muestras	0,05	0,01	Tamaños de las muestras	0,05	0,01	Tamaños de las muestras	0,05	0,01
2 2 2	—	—	2 2 1 1	—	—	2 2 1 1 1	—	—
3 2 1	—	—	2 2 2 1	5,679	—	2 2 2 1 1	6,750	—
3 2 2	4,714	—	2 2 2 2	6,167	6,667	2 2 2 2 1	7,133	7,533
3 3 1	5,143	—	3 1 1 1	—	—	2 2 2 2 2	7,418	8,291
3 3 2	5,361	—	3 2 1 1	—	—	3 1 1 1 1	—	—
3 3 3	5,600	7,200	3 2 2 1	5,833	—	3 2 1 1 1	6,583	—
4 2 1	—	—	3 2 2 2	6,333	7,133	3 2 2 1 1	6,800	7,600
4 2 2	5,333	—	3 3 1 1	6,333	—	3 2 2 2 1	7,309	8,127
4 3 1	5,208	—	3 3 2 1	6,244	7,200	3 2 2 2 2	7,682	8,682
4 3 2	5,444	6,444	3 3 2 2	6,527	7,636	3 3 1 1 1	7,111	—
4 3 3	5,791	6,745	3 3 3 1	6,600	7,400	3 3 2 1 1	7,200	8,073
4 4 1	4,967	6,667	3 3 3 2	6,727	8,015	3 3 2 2 1	7,591	8,576
4 4 2	5,455	7,036	3 3 3 3	7,000	8,538	3 3 2 2 2	7,910	9,115
4 4 3	5,598	7,144	4 1 1 1	—	—	3 3 3 1 1	7,576	8,424
4 4 4	5,692	7,654	4 2 1 1	5,833	—	3 3 3 2 1	7,769	9,051
5 2 1	5,000	—	4 2 2 1	6,133	7,000	3 3 3 2 2	8,044	9,505
5 2 2	5,160	6,533	4 2 2 2	6,545	7,391	3 3 3 3 3	8,000	9,451
5 3 1	4,960	—	4 3 1 1	6,178	7,067	3 3 3 3 3	8,200	9,876
5 3 2	5,251	6,909	4 3 2 1	6,309	7,455	3 3 3 3 3	8,333	10,20
5 3 3	5,648	7,079	4 3 2 2	6,621	7,871			
5 4 1	4,985	6,955	4 3 3 1	6,545	7,758			
5 4 2	5,273	7,205	4 3 3 2	6,795	8,333			
5 4 3	5,656	7,445	4 3 3 3	6,984	8,659			
5 4 4	5,657	7,760	4 4 1 1	5,945	7,909			
5 5 1	5,127	7,309	4 4 2 1	6,386	7,909			
5 5 2	5,338	7,338	4 4 2 2	6,731	8,346			
5 5 3	5,705	7,578	4 4 3 1	6,635	8,231			
5 5 4	5,666	7,823	4 4 3 2	6,874	8,621			
5 5 5	5,780	8,000	4 4 3 3	7,038	8,876			
6 1 1	—	—	4 4 4 1	6,725	8,588			
6 2 1	4,822	—	4 4 4 2	6,957	8,871			
6 2 2	5,345	6,655	4 4 4 3	7,142	9,075			
6 3 1	4,855	6,873	4 4 4 4	7,235	9,287			
6 3 2	5,348	6,970						
6 3 3	5,615	7,410						
6 4 1	4,947	7,106						
6 4 2	5,340	7,340						
6 4 3	5,610	7,500						
6 4 4	5,681	7,795						
6 5 1	4,990	7,182						
6 5 2	5,338	7,376						
6 5 3	5,602	7,590						
6 5 4	5,661	7,936						
6 5 5	5,729	8,028						
6 6 1	4,945	7,121						
6 6 2	5,410	7,467						
6 6 3	5,625	7,725						
6 6 4	5,724	8,000						
6 6 5	5,765	8,124						
6 6 6	5,801	8,222						
7 7 7	5,819	8,378						
8 8 8	5,805	8,465						

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

**Valores críticos de la prueba de Wilcoxon para una muestra**

n	<i>Nivel de significación α</i>				
	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001
5	0,6				
6	2,1	0,6			
7	3,7	2,1	0,3		
8	5,7	3,7	1,6	0,3	
9	8,1	5,7	3,1	1,6	
10	10,8	8,1	5,1	3,1	
11	13,9	10,7	7,2	5,1	
12	17,4	13,8	9,8	7,2	1,0
13	21,4	17,2	12,7	9,8	2,5
14	25,7	21,1	15,9	12,7	4,4
15	30,4	25,9	19,6	15,9	6,5
16	35,6	29,9	23,6	19,5	9,0
17	41,2	34,9	28,0	23,4	11,7
18	47,2	40,3	32,7	27,7	14,8
19	53,6	46,1	37,8	32,4	18,2
20	60,4	52,3	43,3	37,4	21,9
21	67,6	59,0	49,2	42,7	26,0
22	75,3	66,0	55,5	48,6	30,4
23	83,4	73,4	62,2	54,8	35,2
24	91,9	81,3	69,3	61,3	40,3
25	100,8	89,5	76,8	68,3	45,8
26	110,0	98,2	84,6	75,7	51,6
27	120,0	107,9	92,9	83,4	57,8
28	130,2	116,8	101,6	91,5	64,2
29	140,9	126,8	110,7	100,1	71,2
30	152,0	137,1	120,2	109,0	78,5
31	163,5	147,9	130,2	118,3	86,2
32	175,5	159,1	140,5	128,1	94,3
33	187,9	170,7	151,3	138,2	102,7
34	200,7	182,8	162,3	148,7	111,4
35	214,0	195,3	173,9	159,7	120,5
36	227,7	208,2	185,9	171,0	130,1
37	241,9	221,5	198,3	182,8	140,0
38	256,5	235,3	211,1	194,9	150,3
39	271,5	249,5	224,4	207,5	161,0
40	287,0	264,2	238,0	220,4	172,1
41	303,0	279,3	252,1	233,9	183,6
42	319,3	294,8	266,5	247,7	285,4
43	336,2	310,7	281,5	261,9	207,6
44	355,5	327,0	296,8	276,5	220,3
45	371,2	343,8	312,6	291,5	233,3
46	389,4	361,1	328,7	307,0	246,7
47	408,0	378,8	345,4	322,9	260,6
48	427,1	396,9	362,4	339,1	274,9
49	446,6	415,5	379,9	355,9	289,5
50	466,5	434,5	397,8	373,0	304,5

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día.....

**Valores críticos para el test de rangos-signos de Wilcoxon**

$$T_+ = \sum_{i=1}^n z_i \cdot \text{rango}(|D_i|)$$

$\alpha^*$	$P(T_+ \leq k_\alpha) \leq \alpha$					$P(T_+ \geq k_\alpha) \leq 1 - \alpha$				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
n										
4	—	—	—	—	0	10	—	—	—	—
5	—	—	—	0	2	13	15	—	—	—
6	—	—	0	2	3	18	19	21	—	—
7	—	0	2	3	5	23	25	26	28	—
8	0	1	3	5	8	28	31	33	35	36
9	1	3	5	8	10	35	37	40	42	44
10	3	5	8	10	14	41	45	47	50	52
11	5	7	10	13	17	49	53	56	59	61
12	7	9	13	17	21	57	61	65	69	71
13	9	12	17	21	26	65	70	74	79	82
14	12	15	21	25	31	74	80	84	90	93
15	15	19	25	30	36	84	90	95	101	105

$\alpha^*$  no tiene por qué coincidir con el nivel de significación

**Valores críticos  $\rho_{\alpha,n}$  para la prueba de Spearman Rho**

N	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
5	0.70	0.80	0.90
10	0.44	0.55	0.73
15	0.35	0.44	0.60
20	0.30	0.38	0.52
25	0.26	0.34	0.47
30	0.24	0.31	0.43

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Valores críticos de la prueba del signo

$$n = n^+ + n^- \quad P[S^+ \leq n^+] = P[S^- \geq n^-] = p$$

n	n <sup>+</sup>	p	n <sup>-</sup>	n	n <sup>+</sup>	p	n <sup>-</sup>	n	n <sup>+</sup>	p	n <sup>-</sup>
1	0	0,500	1	12	0	0,000	12	17	0	0,000	17
2	0	0,250	2		1	0,003	11		1	0,000	16
	1	0,750	1		2	0,019	10		2	0,001	15
3	0	0,125	3		3	0,073	9		3	0,006	14
	1	0,500	2		4	0,194	8		4	0,025	13
4	0	0,063	4		5	0,387	7		5	0,072	12
	1	0,313	3		6	0,613	6		6	0,166	11
	2	0,688	2	13	0	0,000	13		7	0,315	10
5	0	0,031	5		1	0,002	12		8	0,500	9
	1	0,188	4		2	0,011	11	18	0	0,000	18
	2	0,500	3		3	0,046	10		1	0,000	17
6	0	0,016	6		4	0,133	9		2	0,001	16
	1	0,109	5		5	0,291	8		3	0,004	15
	2	0,344	4		6	0,500	7		4	0,015	14
	3	0,656	3	14	0	0,000	14		5	0,048	13
7	0	0,008	7		1	0,001	13		6	0,119	12
	1	0,063	6		2	0,006	12		7	0,240	11
	2	0,227	5		3	0,029	11		8	0,407	10
	3	0,500	4		4	0,090	10		9	0,593	9
8	0	0,004	8		5	0,212	9	19	0	0,000	19
	1	0,035	7		6	0,395	8		1	0,000	18
	2	0,145	6		7	0,605	7		2	0,000	17
	3	0,363	5	15	0	0,000	15		3	0,002	16
	4	0,637	4		1	0,000	14		4	0,010	15
9	0	0,002	9		2	0,004	13		5	0,032	14
	1	0,020	8		3	0,018	12		6	0,084	13
	2	0,090	7		4	0,059	11		7	0,180	12
	3	0,254	6		5	0,151	10		8	0,324	11
	4	0,500	5		6	0,304	9		9	0,500	10
10	0	0,001	10		7	0,500	8	20	0	0,000	20
	1	0,011	9	16	0	0,000	16		1	0,000	19
	2	0,055	8		1	0,000	15		2	0,000	18
	3	0,172	7		2	0,002	14		3	0,001	17
	4	0,377	6		3	0,011	13		4	0,006	16
	5	0,623	5		4	0,038	12		5	0,021	15
11	0	0,000	11		5	0,105	11		6	0,058	14
	1	0,006	10		6	0,227	10		7	0,132	13
	2	0,033	9		7	0,402	9		8	0,252	12
	3	0,113	8		8	0,598	8		9	0,412	11
	4	0,274	7						10	0,588	10
	5	0,500	6								

Asignatura..... Grupo.....  
 Apellidos ..... Nombre.....  
 Ejercicio del día .....

### Valores críticos del estadístico $\tau$ de Kendall

<i>n</i>	<i>Nivel de significación <math>\alpha</math></i>									
	0,10		0,05		0,025		0,01		0,005	
	s	't*	s	't*	S	't*	S	't*	S	't*
4	6	1,000	6	1,000	8	1,000	8	1,000	8	1,000
5	8	0,800	8	0,800	10	1,000	10	1,000	12	1,000
6	9	0,600	11	0,733	13	0,867	13	0,867	15	1,000
7	11	0,524	13	0,619	15	0,714	17	0,810	19	0,905
8	12	0,429	16	0,571	18	0,643	20	0,714	22	0,786
9	14	0,389	18	0,500	20	0,556	24	0,667	26	0,722
10	17	0,378	21	0,467	23	0,511	27	0,600	29	0,644

Asignatura..... Grupo.....  
Apellidos..... Nombre.....  
Ejercicio del día.....



Instrumentos Estadísticos Avanzados  
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales  
Departamento de Economía Aplicada  
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández